講　座

放射光の性質

宮原恒昱
高エネルギー物理学研究所

今号と次号の２回にわけて，放射光の性質をなるべく初等的に解説してみたい。その際，高等な数式を使用しないので，表現が定性的または半定量的にならざるを得ないことを，あらかじめおことわりしておきたい。

1．自由電子と放射

自由電子レーザーという言葉があるくらいだから，自由電子から放射光が出るのかと誤解されやすいが，実は，完全に自由な電子が１ヶの光子を放出したり吸収したりするのは不可能である。なぜならば，エネルギーと運動量の両方を保存することができないからである。たとえば，光の放出の前後の電子のエネルギーと運動量をそれぞれ，E_0，$\mathbf{P}_0$，E_1，$\mathbf{P}_1$とすると

$$E_0 = (|\mathbf{P}_0|^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} \qquad ①$$
$$E_1 = (|\mathbf{P}_1|^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} \qquad ②$$

という関係が成立している。ここでcは光速，m_0は電子の静止質量である。一方，運動量を保存させるためには、光子のエネルギーE_Pは

$$E_P = |P_0 - P_1|\, c \qquad ③$$

でなくてはならない。ここで①と②の差をとると

$$E_0 - E_1 = \frac{c(P_0 - P_1)(P_0 + P_1)}{E_1 + E_2}$$

となる。ただし，$|\mathbf{P}_0| = P_0$，$|\mathbf{P}_1| = P_1$とおいた。さらにベクトルの三角不等式$P_0 - P_1 \leqq |\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1|$を用いると

$$E_0 - E_1 \leqq |\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1| \frac{c(P_0 + P_1)}{E_1 + E_2}$$

一方，①，②より明かに

$$\frac{P_0 + P_1}{E_1 + E_2} < 1$$

よって

$$E_0 - E_1 \leqq |\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1|\, c = E_P$$

以上より，運動量保存を満足しようとすれば$\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1 = 0$（すなわち，吸収も放出もない）でない限り，エネルギーを保存しないことがわかる。

もっとも，以上のことは，一光子の過程についてのみ正しい。２光子以上の過程（光子の散乱）については，コンプトン散乱のように，エネルギーと運動量の保存の両方を満足させることが可能

である。

2．光と不確定性

不確定性というと，普通は，量子力学における不確定性関係を思いおこす読者が多いであろう。量子力学で光子の状態を記述することはもちろん可能であるが，ここでは古典電磁気学の範囲で導びかれる不確定性に注目する。

そもそも「光」をどのように定義するかが、不確定性とからんで問題となる。ここでは，「光子」という粒子を連想するものからは程遠くなるが，エネルギーが十分に定まった状態，すなわち$\Delta\omega/\omega$または$\Delta\lambda/\lambda$が十分に小さい状態を考えよう。もし仮に$\Delta\omega=0$とすれば，これは完全にエネルギーの定まった単色電磁波に他ならない。このような単色電磁波の波連の長さは無限に長いから，たとえ異なる光源から放出されたものであっても，空間的に同一の場所に伝播すれば必ず干渉する。

$\Delta\omega\neq0$の場合はどうなるのであろうか。この場合は，「波束」という描像がより適切である。すなわち，$\Delta\omega$程度の不確定性をもつ波の重ね合わせの結果，実空間上のあるところにピークをもつような波束になるのである。この波束の長さはどの程度になるであろうか。この長さは，光がその距離を進む時間Δtに直して考えるとわかりやすい。すなわち，電磁波の時間依存は$\exp(i\omega t)$という形で与えられるから，ωの分布にガウス分布を過程して，その半値全幅を$2\Delta\omega$で与えたとすると，フーリエ変換の性質から$2\Delta t$もまたtのガウス分布の半値全幅となり（付録1参照），その間の関係は，

$$\Delta\omega\Delta t\sim1 \qquad ④$$

となる。これを，波長λと、進行方向にそった座標Zとの関係に変形すると

$$\omega=2\pi c/\lambda,\qquad \Delta Z=c\Delta t$$

より

$$|\Delta\omega|=2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$$

に注意して，

$$(\Delta\lambda/\lambda^2)\,\Delta Z=1/(2\pi)$$

すなわち

$$\Delta Z=(1/(2\pi))(\lambda^2/\Delta\lambda) \qquad ⑤$$

となる。$2\Delta Z$を波束の長さ（半値全幅）とみなすことができる。

さて，⑤の式からわかるように，波束は，単色性が良ければ良いほど長くなることがわかる。言いかえれば，光の干渉性は，光をどのように観測するかに依存している。たとえ偏向電磁石から放出された光であっても，高い分解能で分光すればするほど，ΔZは大きくなるわけである。アンジュレータ光はしばしば干渉性が大きいと言われるが，これは，そもそもアンジュレータ光が準単色であることの裏がえしの表現に過ぎないことを強調しておこう。

以上のように，ΔZの長さに関連した干渉性を，たて方向干渉性（longitudinal coherence）という。これが長ければ長いほど，異なる時刻（または異なる光源）から放出された波束が干渉する確率が高くなるのである。

次に、光の不確定性の別の側面について述べよう。この不確定性もやはり我々の観測にかかわっているのであるが、今度は，空間的制約に関するものである。光を小さな幅のスリットを通すと必ず回折する。このことから，無限小の横幅をもち，かつ完全に平行な「光束」は存在しないことがわかる。ここでは「波束」のかわりに「光束」という概念を用いる。「光束」は無限小のサイズをもった一本の幾何光学的光線が多数あつまった集合と考えることができる。光束を構成する一本一本の光線は，おおよそZ軸に平行であるが，わずかに傾いているとしよう。一本の光線の状態を表現するには，Z軸に直交したX軸およびY軸を考えて，(x, x', y, y')という四次元空間内の点を用いる必要がある。ここで$x'=dx/dz$，$y'=dx/dz$は、光線のZ軸に対する傾きである。しかしながら，4次元空間内の点を描くこと

はできないので，いま仮にＸ軸だけを考慮してＸ－Ｘ’空間を考えてみる。そうすると，１本の光線はＸ－Ｘ’空間上の座標（ｘ，ｘ’)で与えられる。

さて，ここで考えている不確定性関係は，空間的制約に関するものである。すなわち実際の光束を光線の集合体と考え，それぞれの光線に対して，点を対応させたとき，その点のＸ－Ｘ’空間内での分布を問題にしている。光束の中心付近は点の密度が高く周辺に行くほど密度が小さくなるのは，自然の分布である。この分布をＸ－Ｘ’空間に描いたとき二次元のガウス分布になる場合が一番考えやすい。この時，点の分布は一般には図１のような，斜めの楕円で特徴づけられる分布になる場合もあるし，また特別な場合は図２のように斜めでない楕円になることもある。重要なことは，回折効果によって，この楕円の面積には，下限が生じてしまうことである。その下限は以下のように見積られる。

いま，$2\sigma_x$ を半値全幅とするガウス分布の透過特性をもつ仮想的なスリットを考えよう。普通のスリットは矩型的な透過特性をもつから，今考えているスリットは，あくまでも仮想的なものである。このとき，この光束の回折による角度広がりも，フーリエ変換によりガウス分布となり，この半値全幅を $2\sigma_{x'}$ とすると

$$\sigma_x \sigma_{x'} = \lambda / (4\pi) \qquad ⑥$$

となることがわかる。このことから図２の楕円が回折限界に相当すると，その面積をＡとすると

$$A = \pi \sigma_x \sigma_{x'} = \lambda / 4$$

となる。一般に光束の分布をＸ－Ｘ’平面に描くと，その図形の面積はＡより小さくならず，回折限界のときにＡに等しくなるのである。加速器学のほうでは

$$W = A / \pi = \lambda / (4\pi)$$

とおいて，Ｗをエミッタンスという場合が多い。その意味では，光にはゼロでない最小のエミッタンスが存在するということができる。

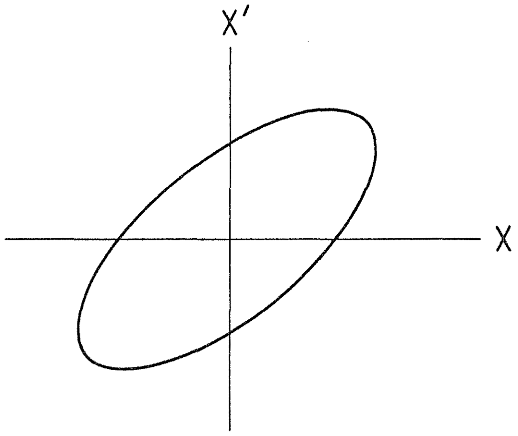

図１

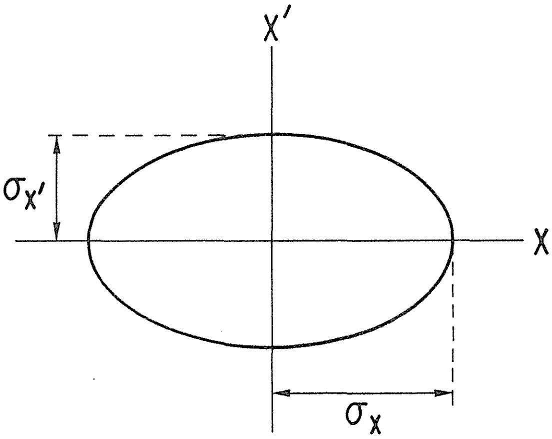

図２

ところで⑥式を見ると，$\Delta\omega$ と Δt との関係を表す④式に非常に似ていることがわかる。このことから，$\Delta\omega$ と Δt との関係が観測にかかわっていたのと同様に，σ_x と $\sigma_{x'}$ との関係も観測にかかわっていることが予想される。以下にそき一例を示そう。

そこでまず準備として「点光源」を定義しておこう。点光源とは，その分布が図２のような斜めでない楕円でかつ最小エミッタンスをもつようなものである。なぜこれを「光源」と呼ぶかというと，それは，このような楕円を仮定すると，この光束がそのまま直進しても逆行しても楕円は必ず斜めになり，これをＸ軸に投影したサイズがどちらの場合も大きくなるからである。この意味で，

点光源は，ある種の「焦点」になっていると言える。ただし，エミッタンスがゼロでない有限な大きさを持っているので，幾何光学的に大きさのない点ではあり得ないのである。点光源は，σ_x または$\sigma_{x'}$ のどちらかに一つの自由度をもっているが，それは以下の例にも表れている。

さて，**図3**(a)は，空間的に分離した2つの点光源を相空間に示したものである。それぞれの分布は回折限界すなわち最小のエミッタンスを持っていると仮定しよう。このような2つの点光源が，ある距離だけ直進すると**図3**(b)のようになる。これは楕円が面積をかえずに斜めになった結果である。ここで，この2つの斜めの楕円の光束に対してスリットをとおしてみよう。スリット幅dが十分に小さいと，スリットをとおった直後には，光束は**図3**(c)のようなたて長の楕円になるであろう。これは，光束の幅がdに制限された結果，回折効果によって$\sigma_{x'}$ が大きくなるからである。ここで，注目すべきは，**図3**(c)においては，たて長の2つの楕円の一部が互いに重なっていることである。この重なった部分に注目する限り，2つの点光源のどちらから光がやってきたかを区別することはできない。すなわち，2つの空間的に離れた点光源もきわめて細いスリットで観測すれば，同一の光源とみなせるわけである。同一の光源と見なせるか否かは，偏向部放射やアンジュレータ放射の干渉性を論ずる場合に，きわめて重要なポイントであるが，それについては次号で解説しよう。

回折限界の光束にたいするスリットの効果は，結局のところ，**図4**のように，楕円の面積を変えずに，形を変えること　であるが，当然のことながら強度は，σ_xを小　さくした分だけ減少する。

以上のように，σ_xと$\sigma_{x'}$ に関わる不確定性も，観測の仕方にかかっていることが明かとなった。またX－X’空間のような相空間で記述できる干渉性を，たて方向干渉性とは区別して，横方向干渉性（transverse coherence）と言う。一般に低エミッタンス光源の干渉性が大きいというのは，

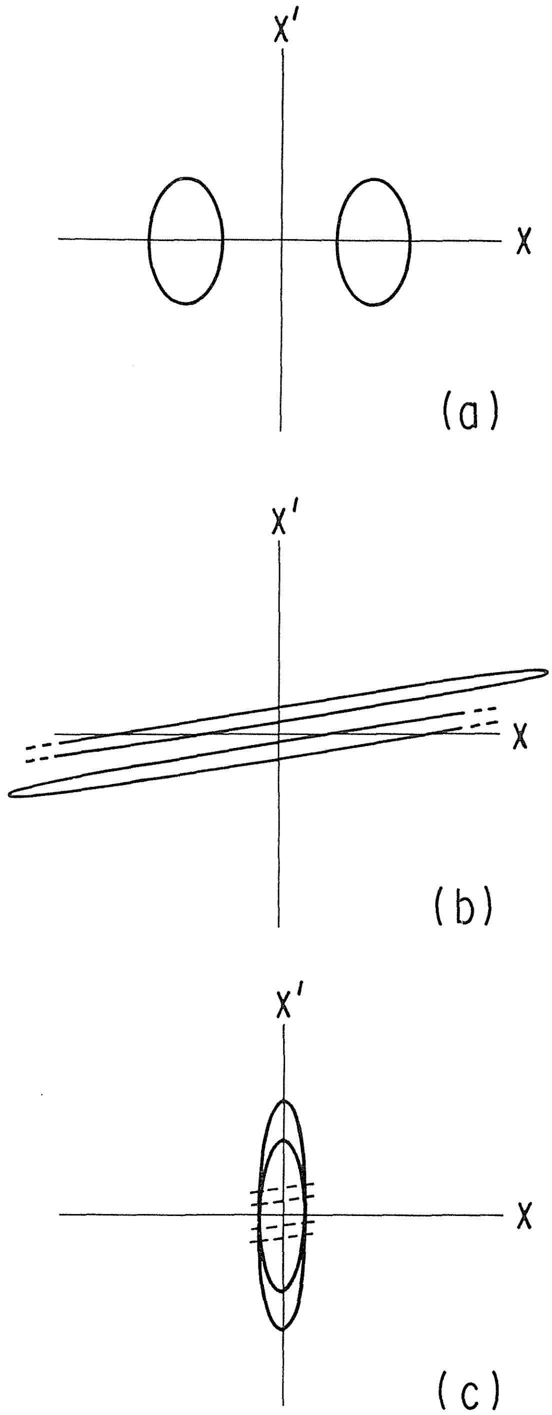

図3

エミッタンスが回折限界に近いとき，横方向干渉性が大きくなることを意味しているのである。逆に言えば，大エミッタンスの光束の場合，**図5**のように，互いに離れた，回折限界楕円をその中に描くことができるから，このままでは，これら2つの楕円の間に，横方向干渉性が存在しないので

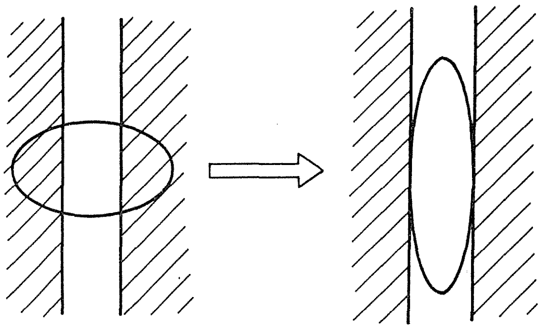

図4

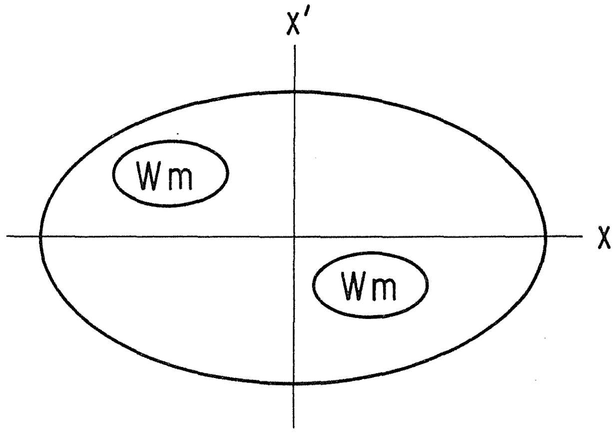

図5

ある。大エミッタンスの光源の干渉性が悪いというのは，このような意味においてである。

以上，光の不確定性には2種類あること，それぞれの不確定性は，光をどう観測するかにかかわっていることを述べた。これらのことをはっきりおさえておくと，放射光の発生の原理および放射光の性質の理解は，より容易になるはずである。

次号には，上記の議論を基礎として，偏向部からの放射やアンジュレータからの放射の性質について解説する予定である。

付録1

$$f = \exp(i\omega t)\exp(-\omega^2/2(\Delta\omega)^2)$$

とおいて変型すると

$$f = \exp\left[-\frac{1}{2(\Delta\omega)^2}(\omega^2 - 2(\Delta\omega)^2 i\omega t)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2(\Delta\omega)^2}(\omega^2 - (\Delta\omega)^2 i t)^2 - \frac{(\Delta\omega)^2}{2}t^2\right]$$

したがってfをωについて積分した結果，tを含む項は

$$\exp\left[-\frac{(\Delta\omega)^2}{2}t^2\right]$$

という形になり，これはtについてのガウス分布の形をしている。