硬X線領域での移相子の開発とその応用

平野馨一 石川哲也 菊田惺志

東京大学物理工学科

1 はじめに

シンクロトロン放射光は実験室線源とは異な り,顕著な偏光特性を持っている。可視光領域で は移相子による偏光の制御/解析が古くから行わ れてきたが,硬X線領域でも放射光の偏光特性を 有効利用するためには移相子の開発が必要であ る。

硬X線領域では、シリコン等の完全結晶を回折 条件下で分光器などの光学素子として用いる事が 多い。完全結晶によるX線の回折は動力学的回折 理論によって記述されるが1-2, それによると, 結 晶内に生じる電場ベクトルのσ, π偏光成分の波 数ベクトルはわずかに異なる。最初この複屈折効 果は、ラウエケース配置のくさび型結晶における ペンデル縞の周期的なぼやけという形で観測さ れ³⁻⁴, その後 Skalicky ら⁵ により, ラウエケー ス回折条件下にある結晶が移相子(ラウエケース 移相子)としての機能を持つことが指摘された。 これを受けて安中⁶と Brümmer $ら^{\eta}$ は λ /4 板を作 製し、実験室線源で楕円偏光を生成することに成 功した。この後ラウエケース移相子は放射光で楕 円偏光を生成するのに利用されるようになった が8-9), ラウエケース移相子には, 移相子結晶内で 生じる位相差の制御が困難であるという問題点が あった。

これに対し,最近我々はブラッグケースの回折 を利用する透過型の移相子(透過型ブラッグケー ス移相子)を開発した¹⁰⁻¹¹⁾。透過型ブラッグケー ス移相子では,薄い平行平板の完全結晶を選択反 射領域より数秒~十数秒ずらした角度位置に置 き,そこからの透過波(前方回折波)を利用す る。ブラッグケース移相子内で生じる位相差は照 射角に対してゆるやかに変化する関数であるため に,位相差の制御は比較的容易である。これによ り,ラウエケース移相子では困難だった,偏光の 精密な制御及び解析が可能となった。

最初,透過型ブラッグケース移相子の評価を東 京大学強力X線実験室の1アンペア回転対陰極型 X線発生装置を用いて行い,波長 λ =0.154nmで 左右円偏光を生成した¹¹⁾。次にPFのBL – 15C で円偏光を生成する実験を行い,波長 0.14~0.16nmの領域で | Pc | > 0.98の左右円偏 光を生成した。また、ARのビームラインNE1の 楕円マルチポールウィグラー(EMPW)からの ビームの偏光状態を決定する実験を行った¹²⁾。本 稿ではまず透過型ブラッグケース移相子の原理を 紹介し,それを用いた応用実験について述べる。

2 透過型ブラッグケース移相子¹⁰⁻¹¹⁾

平面波偏光X線が,対称ブラッグケースで薄い 平行平板の完全結晶に入射して回折を起こす場合 について考える。この時,結晶内には図1に示す ような波動場が形成される。結晶中では動力学的 回折による複屈折効果のために, σ 偏光成分と π 偏光成分の波数ベクトルはわずかに異なってお り,波動場が結晶内を伝播するにつれて,これら



Fig.1 Dispersion surfaces of Bragg - case X - ray diffraction and the wavevectors of Bloch waves existing in the crystal. $K_{\sigma\sigma}(K_{h\sigma})$ and $K_{\sigma\sigma}(K_{\sigma\pi})$ are the wavevectors for σ - and π - components of the transmitted (diffracted) beam. At the glancing angle lower than the exact Bragg angle, $|K_{\sigma\sigma}|$ > $|K_{\sigma\pi}|$, and at the higher angle, $|K_{\sigma\sigma}| <$ $|K_{\sigma\pi}|$.

の偏光成分間に位相差δが生じる。

入射X線と前方散乱されたX線の電場ベクトル を、位相を振幅の中に含めた形でそれぞれ

$$Ei = \begin{pmatrix} Ei\sigma \exp\{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\} \\ Ei\pi \exp\{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\} \end{pmatrix}$$

$$Eo = \begin{pmatrix} Eo\sigma \exp\{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\} \\ Eo\pi \exp\{i(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\} \end{pmatrix}$$
(1)

と書く。 Eia, Ein, Eoa, Eonは複素数である。 この時

$$\mathbf{Eo} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}_{\sigma} \mathbf{O} \\ \mathbf{O} \, \boldsymbol{\xi}_{\pi} \end{pmatrix} \mathbf{Ei} \tag{2}$$

という関係式が成り立つ。ここで*を。とを、*は動力学 的回折理論から導かれる複素数の係数であり¹³⁰, 結晶が中心対称を持つ時には次式で与えられる。

$$\xi_{\sigma\sigma\sigma\pi} = \frac{(\xi^{(1)} - \xi^{(2)}) \exp(2\pi i \delta \mathbf{k}_{z}^{(1)} t) \exp(2\pi i \delta \mathbf{k}_{z}^{(2)} t)}{\xi^{(1)} \exp(2\pi i \delta \mathbf{k}_{z}^{(1)} t) - \xi^{(2)} \exp(2\pi i \delta \mathbf{k}_{z}^{(2)} t)}$$
(3)

ただし,

$$\xi^{(1,2)} = -\frac{1}{1 + i\chi''_{h}/|\chi'_{h}|} \left[(W + ig) \pm \sqrt{(W + ig)^{2} - \left(1 + i\frac{\chi''_{h}}{|\chi'_{h}|}\right)^{2}} \right]$$

$$\delta \mathbf{k}_{z}^{(1,2)} = \frac{\mathrm{KC}|\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{h}}'|}{2\sin\theta_{\mathrm{B}}} \Big[(\mathrm{W} + \mathrm{ig}) \pm \sqrt{(\mathrm{W} + \mathrm{ig})^{2} - \left(1 + \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{h}}''}{|\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{h}}'|}\right)^{2}} \Big] - \frac{\mathrm{i}\mathrm{K}\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{o}}''}{2\sin\theta_{\mathrm{B}}}$$
$$W = \frac{(\theta_{\mathrm{o}} - \theta_{\mathrm{B}})\sin(2\theta_{\mathrm{B}})}{\mathrm{C}|\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{h}}'|}, \ \mathbf{g} = \frac{\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{o}}''}{\mathrm{C}|\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{h}}'|}$$
$$C = \begin{cases} 1 \quad \text{for } \sigma - \text{polarization} \\ \cos(2\theta_{\mathrm{B}}) \text{ for } \pi - \text{polarization} \end{cases}$$

ここで、Kは入射X線の波数、 θ_{B} は屈折の効果を 考慮に入れたブラッグ角、 θ_{0} は入射角、tは結晶 の厚さ、Cは偏光因子、 χ_{h} 、 χ_{h} "は原子散乱因子 の実数部及び虚数部から導かれた電気感受率のh 番目のフーリエ成分である。パラメータWは規格 化された角度変数であり、 σ 偏光、 π 偏光に対す るWをそれぞれW_o、W_xと表記すると、 Δ W_o= 2(Δ W_x=2)は σ (π)偏光に対するDarwinの全反 射領域の角度幅に相当する。結晶内で生じる2つ の偏光成分間の位相差 δ は ξ_{o} と ξ_{x} を用いて次のよ うに表現される。

$$\delta = \operatorname{Arg}\left(\frac{\xi\sigma}{\xi\pi}\right) \tag{4}$$

(3)(4)式より,位相差 δ は入射角のブラッグ角か らのはずれの角 $\Delta \theta$ の関数であり, $\Delta \theta$ を調節し て

$$\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n: \text{Integer}) \tag{5}$$

とすれば, λ/4板が得られる。

位相差 δ の入射角度依存性の計算例を図2に示 す。計算は波長 0.154nm,厚さ 62 μ mのシリコ ンの対称ブラッグケース220反射について行った。 図2より、W σ = ± 5の付近で λ /4板が得られて いる。実際には移相子に入射するX線が角度発散 を持つために位相差 δ はぼやけるが、入射X線の 発散角が Δ W σ ~2程度の時には δ のぼやけは充分



Fig.2 Calculated phase difference δ as a function of W σ . (Si220 symmetric reflection in the Bragg case, λ =0.154nm, t=62 μ m).

に小さく, λ/4板として使用することができる。

3 円偏光生成光学系

これまで,硬X線領域で(楕)円偏光X線を生 成する方法として,オフアクシス放射光を利用す る方法,挿入型光源による方法¹⁴⁻¹⁵⁾,ラウエケー スλ/4板による方法⁶⁻⁹⁾等が用いられてきた。こ の三者の中で最も有力なのは,高輝度(楕)円偏 光が得られる挿入型光源を用いる方法である。既 にARのビームラインNE1では楕円マルチポール ウィグラー(EMPW)が稼働中であり,円偏光度 Pc~±0.7程度の楕円偏光が得られている。しか し, EMPWからのビームの偏光は分光器で乱され るため¹⁶⁾,出射ビームの偏光を保ちながら波長を 変えることは難しい。

透過型ブラッグケース移相子をλ/4板として利 用して円偏光X線を生成する方法(図3)は, (楕)円偏光用挿入型光源と較べて強度の点で劣る が,ストレージリング中を周回する陽電子(電 子)のエミッタンスに左右されることなく,連続 波長領域で純粋な(|Pc|>0.98)左右円偏光が得ら れ,しかも偏光の回転方向を素早く逆転できると いう長所を持つ。

透過型ブラッグケース移相子からの透過波電場



Fig.3 X - ray quarter wave plate using Bragg case diffraction. Linear polarization of the incident beam is converted to circular polarization by the quarter wave plate.

ベクトルの σ 偏光成分の振幅を E_s , π 偏光成分の 振幅を E_s , 両者の位相差を δ とすると, 透過波の 円偏光度Pcは次のようになる。

$$Pc = \frac{2E_{\sigma}E_{\pi}}{|E_{\sigma}|^{2} + |E_{\pi}|^{2}}\sin\delta$$
(6)

移相子に入射するビームが直線偏光の時には,偏 光面を錯乱面に対して 45 度傾けることで, $E\sigma$ ~ E_{x} とすることができる。この時には

 $Pc \approx \sin \delta$ (7)

である。位相差 δ は波長 λ 及び入射角のブラッグ 角からのはずれの角 $\Delta \theta$ の関数であるから、 $\Delta \theta$ を調節することで広い波長領域で | Pc | ~1とす ることができる。図4に、散乱面に対して45度傾 いた平面波直線偏光X線が、厚さ 62 μ mのシリコ ン (110) に入射して220反射を起こす時に、 $\lambda \Delta \theta$ マップ上で透過波の | Pc | が0.95以上になる 領域を示す。図4より波長が0.14から0.16nm ま で変化しても、| Pc | > 0.95となる $\Delta \theta$ の領域は 5秒程度しか変化しない。また、 $\Delta \theta$ を約30秒変 えるだけで各波長で右回りと左回りの円偏光を交



Fig.4 Hatched areas are regions where circularly polarized X - rays with | Pc | > 0.95 is obtained. Calculations were made for symmetric Bragg case 220 reflection of silicon at t=62 μ m.

互に生成することができる。

ブラッグケース移相子をλ/4板として用いる円 偏光生成光学系を図5に示す。純粋な左右円偏光 を得るためには、λ/4板に入射するビームは平行 で散乱面に対して約45度傾いた直線偏光である必 要がある。そのために、図5の光学系は平行ビー ムを得るための2結晶コリメーターB,直線偏光 を作るための2結晶ポラライザーE¹⁷及びλ/4板 Fとから構成されている。光学系全体はサイズ 1.5m×1.5mの定盤上に構成されており、この後 ろに更にデイフラクトメーター等を置いて、円偏 光ビームによる回折・散乱・吸収実験を行うこと ができる。

図5の光学系により波長 0.14~0.16nm で左右円 偏光を生成する実験を PFの BL – 15C において行 った。放射光はまずビームラインに設置されてい る平行配置二結晶モノクロメーターにより単色化 され,入射強度モニター用のイオンチェンバーA を通った後,対称 – 非対称二結晶コリメーターB に入射する。コリメーターにはシリコンの 220 反 射が用いられている。非対称反射用のシリコン結 晶は格子面が結晶表面に対して 14.6 度傾いてお



Fig.5 Optics for the production of circularly polarized Xrays. A, Ionization chamber for adjusting the beamline monochromator; B, symmetric asymmetric double crystal collimator, Si 220 reflections; C, Ionization chamber for monitoring the incident intensity; D, Slit; E, Double Crystal Polarizer, Si 422 reflections; F, Quarter - wave plate, Si 220 reflection in Bragg geometry, transmitted beam is used for production of circularly polarized X-rays; G, Polarizatio analyzer, Si 422 or Si 333 reflection (depending on the wavelength); H, Nal scintillation counter for monitoring the angular position of the quarter wave plate crystal; I, Nal scintillation counter for measuring the integrated intensities of the analyzer crystal.

り,回折波の角度幅は波長 0.14nmのビームに対し ては 2.1秒,波長 0.16nm では 2.8秒になる。コリ

360

メーターにより平行化さたビームは次にスリット Dで0.5mm × 0.5mm の大きさに絞られた後,二 結晶ポラライザーEに入射する。ポラライザーに はシリコンの422反射が利用されており、水平面 に対して45度傾いた直線偏光を得るために,45 度傾斜型ゴニオメーター上に固定されている。ポ ラライザーからのビームはλ/4板Fに入射し左右 円偏光に変換される。λ/4板には厚さ62μmの シリコンの220反射が利用されている。λ/4板の 角度位置 $\Delta \theta$ はシンチレーションカウンターHで モニターされている。λ /4 板からの前方回折波の 偏光状態を解析するために偏光アナライザー結晶 としてシリコン422結晶Gが用いられている。ア ナライザー結晶は精密4軸ゴニオメーター上に固 定されており、χ軸の0度から100度まで10度お きの各点でゆ軸に関する回折強度曲線を測定し積 分反射強度Iを求めることで偏光解析を行った。

波長 0.15nm での偏光解析の実験結果を図6に示 す。Ⅰ- χ曲線が

$$I = A \sin(2\chi + B) + C \tag{8}$$

の形をしている時(A, B, Cはフィッティング パラメーター), アナライザー結晶に平面波が入 射していると仮定すると, | Pc | は次式で与えら れる。

$$|\mathbf{Pc}| = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{A}(1+\alpha)}{\mathbf{C}(1-\alpha)}\right)^2} \tag{9}$$

ここで α はアナライザー結晶での σ 偏光と π 偏光 の積分反射強度の比である。アナライザー結晶が 理想的な場合(ブラッグ角が45度の場合) α の値 はゼロになる。図6からPcを評価したところ、 $\Delta \theta = -13.0$ 秒ではPc=0.99、 $\Delta \theta = 13.0$ 秒では Pc= -0.98になった。但しPcの符号に関してはこ こで行った偏光解析の方法では知ることができな いので、理論からの推測に依った。なお得られた 円偏光の強度は~10⁵ cps であった。



Fig.6 Measured (marks) and calculated (lines) integrated intensities from the polarization analyzer are plotted against χ at λ =0.15nm. Open circles are for $\Delta \theta$ =- 13.0 arcsec, squares are for $\Delta \theta$ =+11.0 arcsec and triangles are for $\Delta \theta$ =- 13.0 arcsec.



Fig.7 The highest Pc's obtained at $\lambda = 0.14 \sim 0.16$ nm. Open circles correspond to right-handed circular polarizations and open squares correspond to left - handed circular polarizations.

このような偏光解析測定及び円偏光度 Pcの評価 を他の波長においても行い,図7のような結果を 得た。波長 0.14~0.16nm で | Pc | > 0.98の左右 円偏光が得られている。

4 偏光状態の完全決定¹²⁾

これまで硬X線領域における偏光解析には,45 度のブラッグ反射を利用する直線検光子が主に用



Fig.8 Experimental arrangement for the complete determination of the polarization state setup at AR - NE1. A, beamline double - crystal mono - chromator, Si 111 reflections; B, phase retarder crystal, Si 220 reflection in Bragg geometry, transmitted beam is used for polarization analysis, 64 μ m thick; C, analyzer crystal, Si 422 reflection; D, Nal scintillation detector for monitoring the angular position of the phase retarder crystal; E, Nal scintillation detector for measuring the integrated intensities of the analyzer crystal.

いられてきた。しかし、この検光子では円偏光の 回転方向を知ることができないばかりではなく、 円偏光成分と無偏光成分とを区別する事もできな い。可視光領域では移相子と直線検光子の組み合 わせにより、偏光状態の完全決定が行われている が¹⁸⁾、硬X線領域でも同様に直線検光子とブラッ グケース移相子を組み合わせることにより、偏光 状態の完全決定を行うことができる。

最初に単色平面波偏光X線の偏光解析を直線検 光子だけで行う場合について考える。入射偏光X 線の電場ベクトルの水平・垂直成分の振幅を E_{\parallel} , E_{\perp} , 両者の間の位相差を Δ s で表すことにする。 これを直線検光子で解析した時の積分強度のx軸 依存性 Fpol(χ)は次のようになる。

 $F_{\text{pol}}(\chi) = E_{\perp}^2 \cos^2 \chi + E_{\text{I}}^2 \sin^2 \chi + E_{\perp} E_{\text{I}} \cos \Delta_{\text{s}} \sin(2\chi) \quad (10)$

通常のビームは無偏光成分を含んでいるが、その 強度を | Eu | ²とすると式(10)は次のようになる。

$$F_{\text{pol}}(\chi) = (E_{\perp}^{2} + E_{U}^{2}) \cos^{2}\chi + (E_{I}^{2} + E_{U}^{2}) \sin^{2}\chi + E_{\perp}E_{I}\cos\Delta_{s}\sin(2\chi)$$
(11)

この式より,入射ビームが左右円偏光の場合と無 偏光の場合を区別できないことは明らかである。

次にブラッグケース移相子と直線検光子により 偏光解析を行う場合について考える。簡単のため に移相子では吸収は無視でき、電場ベクトルの水 平・垂直成分間の位相差が δ (W σ)だけ変化する と仮定する。ここでW σ は移相子のブラッグ角か らのはずれの角を表すパラメーターである。この 時に Fpol(χ) は次のように書ける。

$$F_{pol}(\chi) = (E_{\perp}^{2} + E_{U}^{2})\cos^{2}\chi + (E_{1}^{2} + E_{U}^{2})\sin^{2}\chi + E_{\perp}E_{\perp}\cos(\Delta_{s} + \delta)\sin(2\chi)$$
(12)

これより、数点の $W\sigma$ で Fpol(χ)を測定すれば、 E₁, E₁, E₁及び Δ sの値を求められる。

この方法により、AR - NE1のEMPWからの ビームの偏光状態を決定する実験を行った。実験 配置を図8に示す。実験の間、ウィグラーのパラ メーターは、磁石列が空間的な位相差-π/2を生 じるように, 垂直方向のギャップ30mm, 水平方 向のギャップ130mm,両者のずれを40mmに固 定した。 EMPW からの楕円偏光 X線の波長は, ビームライン二結晶モノクロメーターAにより. CoのK吸収端である0.16nmに設定した。次にス リットでビームのサイズを0.5mm × 0.5mm に絞 り、ブラッグケース移相子Bに入射させた。移相 子としては厚さ 64 µ mのシリコンの111反射を用 いた。移相子の透過波の偏光解析にはシリコンの 422反射Cを用い、χ軸の0度から70度までの10 し積分反射強度を求めた。移相子結晶のブラッグ 角からのはずれを $W\sigma = -4$, -5, -6, -7としたときの各点で偏光解析を行った。

図9に実験結果とサインカーブによるフィッテ ィッグ曲線を示す。フィッティング曲線の最低点 はW σ = - 5 の時に観測されている。これは, W σ = - 5 の時に最も移相子の透過波が直線偏光に 近いことを表す。 EMPW からのビームの偏光状態



Fig.9 Measured integrated intensities under the diffraction conditions of the phase retarder for $W\sigma = -4, -5, -6, -7$. Solid lines are sinusoidal fitting curves.

は表1のように決定された。実際のデータ解析で は、入射ビームの発散角や分光器での偏光状態の 変化等の効果を考慮する必要があるので、(12)の ような単純化された式を用いることはできない。 データー解析の詳細については文献12)を参照され たい。

5 おわりに

以上,透過型ブラッグケース移相子の開発及び その応用例について見てきた。ここで述べた応用 例(円偏光生成光学系及び偏光状態の完全決定) はX線移相子を用いた技術としていずれも基本的 なものであり,最近の円偏光放射光利用研究に対 する関心の急速な高まりを考えた時,将来的に更 に重要性が増していくものと思われる。これまで は放射光の高輝度,連続スペクトル,短パルス特 性を利用した実験がほとんどであったが,移相子 の登場に伴い放射光の偏光特性を有効に利用した

Table 1 Numerical values of $|E^1|^2$ and $|E^1|^2$ for the diffraction condition of the retarder crystal,

 W_{σ} , of -4, -5, -6 and -7

W	$ E_u ^2$	Δ,	E ¹ ₅ ²	$ \mathbf{E}_{\mathbf{s}}^{\scriptscriptstyle 1} ^2$
-4	19.88	- 2.18	89.21	39.30
-5	19.88	- 2.18	85.08	34.91
- 6	19.88	- 2.18	90.05	38.28
-7	19.88	- 2.18	83.84	34.39

実験も容易に行えるようになるであろう。このこ とは特に電子のスピンが関与するX線の散乱・回 折・吸収実験において大きな意味を持つものであ る。また,(楕)円偏光用挿入型光源の重要性は 日に日に増しつつあるが,そこからの光の偏光状 態はビームの中心から測った観測角に強く依存す るため,実験に先だって分光器出射光の偏光状態 を測定しておく必要がある。また既存の偏向電磁 石ビームラインにおいても偏光(直線偏光及び楕 円偏光)を利用する実験のためには分光器出射光 の偏光状態を知らなければならない。その際,本 稿で紹介した偏光状態の完全決定の手法が大いに 役立つであろう。

最後に,本研究を進める上でご指導戴いた帝京大 学の安中正一先生に感謝いたします。また,実験に 協力してくれた三浦道雄君,神崎清志君,玉作賢治 君,三上昌義君に感謝します。

文献

- W.H. Zachariasen; Theory of X ray Diffraction in Cystals (Dover, New York, 1945) p113.
- B.W. Batterman and H. Cole; Rev. Mod. Phys., 36 (1964) 681.
- H. Hattori, H. Kuriyama and N. Kato; J. Phys. Soc. Jpn., 20 (1965) 1047.
- 4) M. Hart and A.R. Lang; Acta Cryst., 19 (1965) 73.

- P. Skalicky and C. Malgrange; Acta Cryst., A28 (1972) 501.
- 6) S. Annaka; J.Phys. Soc. Jpn., 51 (1982) 1927.
- O. Brümmer, Ch. Eisenschmidt and H.R. Höche;
 Z. Naturforsch., 37a (1982) 524.
- J.A. Golovchenko, B.M. Kincaid, R.A. Levesque, A.E. Meixner and D.R. Kaplan; Phys. Rev. Lett., 57 (1986) 202.
- 9) D.M. Mills; Phys. Rev. B, 36 (1987) 6178.
- V.A. Belyakov and V.E. Dmitrienko; Sov. Phys. Usp., 32 (1989) 697.
- K. Hirano, K. Izumi, T. Ishikawa, S. Annaka and S. Kikuta; Jpn. J. Appl. Phys., **30** (1991) L407.
- 12) T. Ishikawa, K. Hirano and S. Kikuta; J. Appl. Crystallogr. in press
- T. Ishikawa and K. Kohra; Handbook on Synchrotron Radiation, Vol.3, ed G. Brown and D.E. Moncton (North – Holland, Amsterdam, 1991) P63
- 14) S. Yamamoto and H. Kitamura; Jpn. J. Appl. Phys., 26 (1987) L1613
- S. Yamamoto, T. Shioya, S. Sasaki and H. Kitamura; Rev. Sci. Instrum., 60 (1989) 1834
- 16) T. Ishikawa; Rev. Sci. Instrum., 60 (1989) 2058
- 17) M. Hart and A.R.D. Rodrigues; Philos. Mag. B, 40 (1979) 149
- M. Born and E. Wolf; Principles of Optics, (Pergamon Press, Oxford) p544