放射光基礎講座（その2）

高エネルギー物理学研究所　宮原　恒昱

6. 波の位相－微視的な場合

前号で電磁波の時間変化は，どのような測定では可能であり，どのような測定では不可能であるかについてのべた。特に定在波については，(10)式のように**k・r**とωtが変数分離されているので，波の時間変化は exp(－iωt)となることも述べた。しかも，このように複素数で表現された時間変化は，量子力学的な記述に特有なものであることについても触れた。

ここで少し量子力学を思い起してみよう。静的なポテンシャルに束縛された一電子の状態は，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)=\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m}+V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r},t) \tag{12}$$

というシュレーディンガー方程式の「定常」解であるので

$$\psi(\mathbf{r},t)=u(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \tag{13}$$

というように，変数分離が行える。(12)式は虚数iを含んでいるので(13)式を実数化することは許されない。それどころか(13)式には，さらに複素数的位相ファクター

$$\exp(i\theta)$$

を乗じてもやはり(12)式の解になっているのである。そうすると，量子力学においては，位相はどのように定まるのだろうか。結論から言えば『位相は相対的にのみ定まる』のである。たとえば(13)式に含まれるωすら単独に定まることはない。「それは変だ，エネルギーがなぜ測定できないのだ」という反論があるかも知れない。もちろん，電子の運動量を測定できればエネルギーは定まる。だが(12)式で扱っている状態は束縛状態であって定在波のようなものであるから，運動量Pの期待値はゼロなのである。したがって，エネルギーすなわちωは，ある状態から別の状態への遷移を通じて定まるのである。基準となる状態の時間変化を $\exp(-\omega_0 t)$ とすれば，それとの差

$$\exp\{-i(\omega-\omega_0)t\}$$

が観測にかかる量になる。実際，$\omega-\omega_0$ なる量は二つの束縛状態間の遷移を伴うような吸収または発光スペクトルによって測定可能である。

次に非束縛状態，すなわち連続状態が関係する場合まで考えてみよう。光電子分光実験では，束縛状態にある電子が光で非束縛状態に励起されるので，運動エネルギーKを測定することによって，束縛エネルギー E_B を

$$E_B=\hbar\omega-K \tag{14}$$

によって知ることができる。このことから，非束縛状態にかかわる $\omega_K=K/\hbar$ が絶対的な意味をもつと言えるだろうか。結論から言えば，この ω_K もやはり相対的な意味しかもたない。たとえば，光電子分光装置全体が負の10kVに帯電していたとしよう。そうすると，大地を標準に考えると，電子は

10keVのポテンシャル・エネルギーを余分に持つことになる。にもかかわらず，ω_Kにはこのような全エネルギーの情報を含み得ないのである。以上より，量子力学的に記述される電子状態について『ωはそれ自身として絶対的に定めることができず他のω_0との差として観測にかかる』と結論されるのである。

7. 波の位相－巨視的な場合

前節において，微視的に記述された波の位相は絶対的には定義されず，観測量でもないことを述べた。それでは電子に関する位相はどのような場合でも観測できないのであろうか。実は系が巨視的に運動する場合は，観測し得る位相が定義できることがあるのである。その一つは，超電導状態における電子のペア（クーパー・ペア）の運動である。クーパー・ペアは光子と同様にボーズ粒子であるので集団的に同じ状態をとることができる。したがって，クーパー・ペアの数をN_cとして，巨視的な波動関数の位相をϕとすると

$$\triangle N_c \Delta \phi > 1/2$$

という不確定性関係が成立する。この関係は，光子についての不確定性関係，(8)式と本質的に同等である。すなわち，微視的には観測量ではなかった位相が，巨視的な運動においては，より「古典的」になり，観測にかかる量となるのである。古典的電磁場においては位相ωtの時間微分ωが観測にかかるのと同様に，超伝導状態については，ジョセフソン効果を通じてやはり位相の時間微分$\dot{\phi}$が観測されるのである。

以上の議論で重要な点は，光子についても，クーパ・ペアについても，相互作用のないボーズ粒子であって，巨視的に同じ状態をとることができる，という点であることを強調しておきたい。

8. 光子間の干渉－ありふれた場合

放射光用のリングは通常，VUVからX線領域の光を発生する目的で建設されている。しかし，リング内の電子は，もっと低周波の電磁波を放出しているのである。そのうち最低周波数のものは，多分，電子ビームの回転周期に対応するものである。ただし，この場合の波長は，リングの周長に対応するから金属で作られたドーナツのために実際には放射はおきないであろう。ドーナツを導波管と考えると，当然のことながらある波長より長い電磁波は通さないからである。

次に考えられるのは，RF周波数に対応する電磁波である。仮に$f = 500$MHzとすると波長は約60cmであるから，ドーナツ内を通過できないであろう。しかし，RF空胴の存在するところでは電子ビームが，この周波数もしくはその高調波を空胴の中に放出しているはずである。このようにして，電子ビームによって空胴内に励起された電磁波が逆に電子ビームに悪影響を与えることがあることは良く知られている。

しかし，ここで問題にするのは，電子ビームが放出する電磁波が蓄積電流の2乗に比例するという，RFの専門家なら誰でも知っている事実である。一方，放射光のユーザーは，光強度が蓄積電流に比例することを知っている。かたや，2乗に比例し，かたや1乗に比例するという違いはどこから来るのであろうか。結論から言えば，問題にしている波長λが電子ビームのバンチ長ℓより大きいか小さいかが問題となるのである。特に$\lambda \gg \ell$の場合は，放射される電磁波のパワーは，蓄積電流またはバンチ内の電子の個数の2乗に比例する。

以上のことを古典的に理解するのは，そう難しいことではない。まず，バンチ内のν番目の電子が放出する振動数ωの電磁波の電場成分を

$$E_\nu = E_{\nu 0} \exp\{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{r}_\nu)\}\exp(-i\omega t) \qquad (15)$$

と書く。ここで，$\mathbf{r}_\nu$は，バンチの重心を原点とした電子の相対位置である。ここで，多数の電子か

らの放射を重ね合わせて考える場合，重要なのは相対的な位相のずれだけであるから

$$E_\nu = E\exp\{\mathbf{ik\cdot r}_\nu\} \tag{16}$$

と単純化し，Nケの電子についての和をとると

$$E_t = \sum_{\nu=1}^{N} E_\nu = E\Sigma\exp\{\mathbf{ik\cdot r}_\nu\} \tag{17}$$

となる。ここで放射されるパワーは，電場の2乗に比例するので

$$\begin{aligned} P \propto E_t E_t^* &= E^2(\sum_\nu \exp\{\mathbf{ik\cdot r}_\nu\})(\sum_\nu \exp\{-\mathbf{ik\cdot r}_\nu\}) \\ &= E^2(N + \sum_{\nu\neq\mu}\exp\{\mathbf{ik}\cdot(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)\}) \end{aligned} \tag{18}$$

と書ける。最後の式の第二項はN(N-1)ケの項を含んでいる。さて，$\lambda \gg \ell$なる条件のもとでは，

$$\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu) \ll 1 \tag{19}$$

であるから，(18)式は

$$P \propto E^2 N^2$$

となってしまい，N^2に比例するという結果が得られるのである。

さて，以上の効果を量子力学的に考えてみるとどうなるであろうか。波数ベクトル$\mathbf{k}$，かたよりαの状態の光子が放出される確率W_Pは

$$W_P \propto (n_{K\alpha}+1)\,|<f|\sum_i^N \exp\{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i\}(\mathbf{e}_K^\alpha\cdot\mathbf{P}_i)|g>|^2 \tag{20}$$

という比例関係で表わされる。ここで$\mathbf{e}_K^\alpha$はかたよりの方向を表す単位ベクトル，$|g>$及び$|f>$はそれぞれ遷移の前後の状態（N電子系の波動関数）である。さて，ここでは，波長がバンチ長よりもはるかに長い場合を考えているから，どの電子についても$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i \ll 1$である。したがって$W_P$は単に

$$W_P \propto n_K^\alpha + 1 \tag{21}$$

と書くことができる。上式において，第二項の1は自然放出に関係しており，第一項は，すでに存在する光子数に比例した誘導放出に関係しているということは，たいていの量子力学の教科書に記述されている。

そこでいま，Nケの電子のすべてが自然放出により光子を1ケ放出するとしよう。このとき，ある電子に注目すると，自分が出す1ケの光子の他に，他のN-1ケの電子が放出した光子による誘導放出がおき，全体としてNケの光子を放出することになる。したがって，Nケの電子全体では，自然放出のみでNケの光子を放出するとき，誘導放出をも含めると，N^2ケの光子を放出することになるのである。

ところで(20)式にたちもどると，実は電子が波長より小さい領域におしこめられていることは，必ずしも必要条件でないことがわかる。重要なことは，すべての電子について$\exp\{\mathbf{ik\cdot r}_i\}$がほぼ同じ値をとるということである。したがって，電子の位置$\mathbf{r}_i$が，$\mathbf{k}$ベクトルの方向に波長λの整数倍だけ異っている場合も同様の寄与をする。ただし，このように電子分布が波長λの周期性をもつようなことは偶然にはおきない。電子分布をそのようにするための特別な過程が必要なのであるが，これは，自由電子レーザーの基本技術の一つとなる。

9. 放射光と誘導放出

前節では，RF周波数程度の電磁波の放出は，電子の個数の2乗すなわちN^2に比例することを説明した。量子力学的にいえば，ほとんど誘導放出によって電磁波が放出されていることになる。通常，放射光が利用されるVUV，X線領域では放射光の強度がNに比例しており，自然放出だけがおきていると考えてよい。そこで，この節では，VUV領域において誘導放出がおきるためにはどの

ようような条件が必要となるかを半定量的に考えてみよう。

まず，電子の進行方向にそって，波長λの長さの領域に，1にくらべてはるかに多数の電子が含まれているとしよう。次に誘導放出にかかわる光子数n_k^αをどのように積算すればよいか。光子はすべて光速度cで運動しているので，単位となる領域を定めないとn_k^αを定義することはできない。しかしある時刻において，進行方向に沿って光子をならべたときに波長λの長さの領域に含まれる光子が何個あるか，これこそがn_k^αの定義として適当なものである。(厳密に言えば，光子密度は波長λの3乗の立方体とk空間の両方を考慮した6次元空間の中で定義するのであるが，ここでは，空間干渉性を暗黙に仮定しており，一次元で考えても，物理的本質は変らない)

さて，誘導放出がおきるためには，自分以外の電子から自然放出によって放出される光子密度n_k^αが少くとも1程度以上でなければならない。すなわち，波長λの長さの領域内で

$$n_k^\alpha > 1 \tag{22}$$

という条件を課すことにする。そこで実際に，アンジュレータ放射について，この光子数を見積ってみよう。まず1ケの電子が長さL(m)のアンジュレータを1回通過したときに放出される放射光のエネルギーΔE(eV)は

$$\Delta E(\mathrm{eV}) = 1.265\times10^3\times E^2(\mathrm{GeV}) < B_T^2 > L(\mathrm{m}) \tag{23}$$

で表わされる。ここで$<B_T^2>$は，テスラで表わした磁場の強さの2乗平均であるが，磁場がサイン関数的に変化している場合は，

$$< B_T^2 > = B_{max}^2/2 \tag{24}$$

となる。ここでアンジュレータからの放射のすべてが基本波に集中しているとして，その光子エネルギー$\hbar\omega$を求め，ΔEを$\hbar\omega$で割り算した値が1ケの電子が放出した光子数であると仮定する。この仮定は明らかに光子数を過大に（場合によっては1ケタ以上）見積ることになるが，ここでは，ごく大ざっぱな見積りをしているので気にしないことにする。さらにアンジュレータに関する以下の式

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1+\frac{K^2}{2}\right) \tag{25}$$

$$K = 93.4\,B_{max}\lambda_u(\mathrm{m}) \tag{26}$$

$$L = \lambda_u N_u \tag{27}$$

を用いる。ここでλ_uは周期長(m)，N_uは周期数であり，γは

$$\gamma = \frac{E}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{28}$$

で定義される。以上を用いると

$$n = \frac{\Delta E}{\hbar\omega} = 7.58\times10^{-3}K^2\left(1+\frac{K^2}{2}\right)N_u \tag{29}$$

が得られる。(29)式を見ると，多くの場合電子が一回，アンジュレータを通過しただけでは0.1ケのオーダーの光子しか放射されないということが理解できるであろう。

次に，1波長あたり1ケ以上の光子がある条件は，長さLのところにL/λ個以上の光子が存在するのと同じである。電子数をN_Eとして，この条件を表すと

$$N_E n > L/\lambda \tag{30}$$

また電流をI_Eとすると

$$I_E = N_E ce/L \tag{31}$$

(29)，(30)，(31)より最終的に

$$I_E(A) > \frac{1}{\lambda(\text{Å})} \times 63.4 \times \frac{1}{K^2(1+K^2/2)} N \qquad (32)$$

という条件が得られる。ただし，前述したように，(29)式で見積られた光子数は明かに過大である。それ故，実際に必要な電流は，(32)式の値よりはさらに大きくなる。また，上の議論では空間的干渉性（横方向干渉性）の不完全さを無視している。つまり，2つの電子が進行方向と直角方向に位置がずれているとき，そのずれがある値より大きいと，一番目の電子が放出した光を2番目の電子が受けとることはできなくなるのである。この値は大ざっぱに言って，考えている電磁波に対する，電子の双極子モーメントをeで割ったもの

$$\langle r \rangle = \langle f | r | g \rangle \qquad (33)$$

の程度である。アンジュレータ内の電子は，サイン的に振動しているから，$\langle r \rangle$はその振動の振幅の程度であって通常数μmから数10μmのオーダーである。実は，この振幅は「横方向干渉性」や「回折限界」と密接な関係があるので，後にこれらについて説明するときに，この問題にたちかえることにする。

横方向干渉性を確保するには，蓄積された電子ビームが「低エミッタンス」であることが必要である。VUV・軟X線領域で誘導放出がおきれば，自由電子レーザーが可能となるが，この実現のためには局所的な大電流と低エミッタンスが必要条件となるのである。

バックナンバー紹介

日本放射光学会特別シンポジウム予稿集（1991年1月）

Part1　小型光源加速器の現状と展望－リソグラフィへの出番は？

Part2　ソ連の放射光新技術

主催　日本放射光学会　　　**後援**　電子技術総合研究所

協賛　応用物理学会

体裁　Part1 B5判，　Part2（OHP集）A4判（全英文、2分冊）

定価　Ｐａｒｔ１，２，とも各1,000円

内容

Part 1　Status and Prospects of Compact Synchrotrons

May we expect their turn for lithography?

Current Techniques of Lithography