

放射光基礎講座 (その5)

偏向電磁石からの放射の一電子理論

高エネルギー物理学研究所 宮原 恒昱

これまで講座を続けて、読者からの感想の中に、“話が定性的にすぎる。もう少し数式を用いてもよいから定量的にならないか”，という指摘があった。もとより私は数式いじりが不得手なので、数式をいじりだすと時間がかかってしまい、先号には原稿が間に合わなくなってパスしてしまった。今回、偏向電磁石からの放射光についてのみ数式を大量に含む原稿を作ることになったが、かえって物理がわかりにくくなってしまわないかという不安ももっている。しかも準備として、どうしても遅延ポテンシャル (Liénard-Wiechert) について触れざるを得ないが、これもやさしく定性的に解説することは頁数をとるので別の機会にし、今回はこれについてはある程度既知のものとしてとり扱っている。

以下をチラと見ただけで読みとばしてしまう読者が少なくないことを危惧しながら、ある意味で「官僚的」に書いた次第である。

1. Liénard-Wiechert のポテンシャル

加速度運動する荷電粒子からの放射について考える時は次の Liénard-Wiechert のポテンシャル (L-W ポテンシャル) から出発すると便利である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{スカラーポテンシャル: } \phi(x_\alpha, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{s} \quad (1) \\ \text{ベクトルポテンシャル: } \mathbf{A}(x_\alpha, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{u}}{s} \quad (2) \end{array} \right.$$

単位系は MKS であり、 s は

$$s = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c} \quad (3)$$

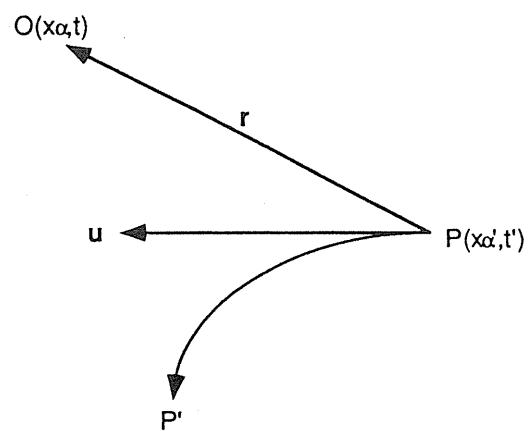


図1

で定義され、観測点は x_α 、観測時刻は t であるが、信号を発した時 t' ($t' < t$) における電荷の位置は x_α 、そのときの電荷の速度は \mathbf{u} である。すなわち、上の L-W ポテンシャルは、 (x_α, t) という座標での値であるが、右辺の \mathbf{u} や s という量は、時刻 t に到達する信号が、出発したときの時刻 t' には、どこにあり、どれだけの速度をもっていたかのみ依存していることに注意する必要がある。従って、時刻 t には荷電粒子は一般には P と異なる P' にあることになる。

2. 変数変換

点 O における電磁場が時間的に変化するとすれば、それをフーリエ変換することによって平面波に分解することができる。但し、この分解は時刻

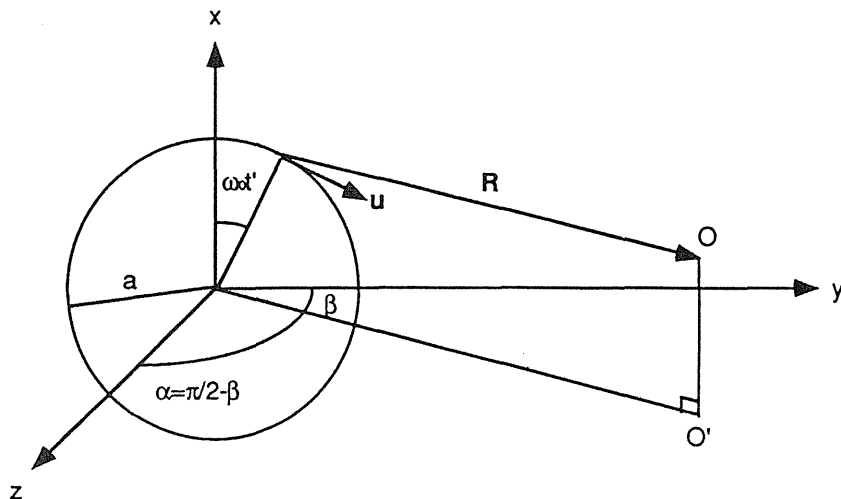


図 2

tに関するものであり、他方L-Wポテンシャルはt'で表現されているから、t↔t'の変数変換の関係を導いておく必要がある。まず、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt'} = -\mathbf{u}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'}\right)_{x_\alpha} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r}$$

また、 $r(x_\alpha, x'_\alpha(t')) = c(t-t')$

これらより

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \frac{\partial r}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{r} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

よって

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{rc}} = \frac{r}{s} \quad \text{または} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{r}{s} \frac{\partial}{\partial t'} \quad (4)$$

が得られ、t↔t'の関係が得られる。

3. 等速円運動からの放射

上図のようなx, y, z軸が直交する座標系を考え、電荷はxy平面上で半径aの円周上を角速度ω₀でまわっているとす。従って、uもxy平面上にあり、これを延長すればy軸とまじわる。観測点Oは円軌道から十分に遠方にあり、図のベクトルRはzy面とほとんど平行であるとする。すなわち、

$R_x \ll R_y, R_z$ でこれらの値は円周上の電荷の位置によらないとする。これを無限遠近似という。ただしこの段階ではβが小さいとは仮定していない。そうすると

$$S = \left(R - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{c}\right) = R\left(1 - \frac{u}{c} \sin\alpha \cos(\omega_0 t')\right)$$

となるから

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{R}{s} \frac{\partial}{\partial t'} = \left(1 - \frac{u}{c} \sin\alpha \cos(\omega_0 t')\right) \frac{\partial}{\partial t'}$$

これを積分すると、

$$t = t' - \left(\frac{u}{c\omega_0}\right) \sin\alpha \sin(\omega_0 t') + \frac{R}{c}$$

但し、この最後の項は積分常数で、t'=0のときt=R/cより決まる。

4. ベクトルポテンシャルのフーリエ分解

$$\frac{4\pi\epsilon_0 c^2 A(x_\alpha, t)}{e} = \frac{\mathbf{u}(t')}{S}$$

であるから、 $\omega = \ell\omega_0$ (ℓは整数), $k = \omega/c$ とおいて、このポテンシャルをω₀の高調波にフーリエ分

解する。第 ℓ 次成分を A_ℓ とすると

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0 c^2 A_\ell(x_d)}{e} &= \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{u}(t')}{S} e^{i\omega t} dt \\ &= e^{ikR} \frac{\omega_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{u}(t')}{R} \exp\left\{i\omega(t' - \frac{u}{c\omega_0} \sin\alpha \sin(\omega_0 t'))\right\} dt' \end{aligned}$$

\mathbf{u} の成分は、

$$u_x = -u \sin(\omega_0 t'), \quad u_y = u \cos(\omega_0 t'), \quad u_z = 0$$

さらに $\varphi = \omega_0 t'$ とおくと

$$\left\{ \begin{aligned} A_{x\ell} &= \frac{eue^{ikR}}{4\pi^2\epsilon_0 c^2 R} \int_0^{2\pi} \exp\left[i\ell\left(\varphi - \frac{u}{c} \sin\alpha \sin\varphi\right)\right] \\ &\quad \times \sin\varphi d\varphi = -\frac{ieue^{ikR}}{2\pi\epsilon_0 c^2 R} J'_\ell\left(\frac{\ell u}{c} \sin\alpha\right) \\ A_{y\ell} &= \frac{eue^{ikR}}{4\pi^2\epsilon_0 c^2 R} \int_0^{2\pi} \exp\left[i\ell\left(\varphi - \frac{u}{c} \sin\alpha \sin\varphi\right)\right] \\ &\quad \times \cos\varphi d\varphi = \frac{\ell eue^{ikR}}{2\pi\epsilon_0 c^2 R} \left\{ J'_\ell\left(\frac{\ell u}{c} \sin\alpha\right) \right. \\ &\quad \left. / \left(\frac{\ell u}{c} \sin\alpha\right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。但し、 J_ℓ, J'_ℓ は第1種のベッセル関数およびその積分である。(5)式の導出については付録Iを参照されたい。

5. 電磁場の計算

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

において

$$A_z = 0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial A_y}{\partial R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \cos\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) = -\frac{e^{ikR}}{R^2} + \frac{ik}{R} e^{ikR} \quad (6)$$

等が得られるが、この式を2乗して、半径 R の球面をつらぬくエネルギーの流れを考えると、 $1/R^2$ に比例する第一項は電磁波の放射に寄与しない。したがって第二項のみを考えればよい。

さらに

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \sin\alpha, \quad \frac{\partial R}{\partial x} \cong 0$$

なので結局

$$\begin{cases} B_x = -(A_{y\ell} \cos\alpha) ik \\ B_y = (A_{x\ell} \cos\alpha) ik \\ B_z = -(A_{x\ell} \sin\alpha) ik \end{cases}$$

また

$$\mathbf{E} = \frac{c}{R} (\mathbf{B} \times \mathbf{R}) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} E_{\ell x} &= \frac{c}{R} (B_y R_z - B_z R_y) \\ &= \frac{c}{R} (A_{x\ell} ik) (R_z \cos\alpha + R_y \sin\alpha) \\ &= \frac{c}{R} (A_{x\ell} ik) (R \cos^2\alpha + R \sin^2\alpha) \\ &= c(A_{x\ell} ik) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_{\ell y} &= \frac{c}{R} (B_z R_x - B_x R_z) \\ &= \frac{c}{R} (-A_{x\ell} ik \sin\alpha \cdot R_x \\ &\quad + A_{y\ell} ik \cos\alpha \cdot R \cos\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\ell z} &= \frac{c}{R} (B_x R_y - B_y R_x) \\ &= \frac{c}{R} (-A_{y\ell} ik \cos\alpha \cdot R \\ &\quad - A_{x\ell} ik \cos\alpha \cdot R_x) \\ &\quad R_x \ll R \text{ なので} \\ &\cong c(-A_{y\ell} ik) \cos\alpha \sin\alpha \end{aligned} \quad (8)$$

以上までの考察では α (したがって β) に何の制限を設けなかった。ここで $\alpha \approx \pi/2$ したがって β

～0) という条件を課する。このとき、 $R_x \ll R$ に注意すると、 $E_{\theta y} \ll E_{\theta x}$ となるが、これは電磁波が横波であるから当然予想される結果である。さて、 $\alpha = \pi/2$ ならば $E_{\theta z} = 0$ となるが、これは電磁波が x 方向に偏光していることを意味する。

さて、以下では通常の放射光の条件、すなわち電子エネルギーが十分に高く、 $u \approx c$ であり、かつ $\alpha \approx \pi/2$ である場合について、さらに近似をすすめよう。

6. ベッセル関数の近似とエアリー関数

ベッセル関数については付録IIにより

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[n(t - \varepsilon \sin t)] dt \quad (9)$$

ともかけるが、 t が大きいときは積分にほとんど寄与しない。特に n が非常に大きいときは、 t が1よりはるかに小さいときのみがほとんどの寄与をする。一方、 ε は $(u/c) \sin \alpha$ に対応するので、 $u \approx c$ のときは、ほぼ1に等しい。よって

$\varepsilon \approx 1$ かつ $\varepsilon < 1$ より

$$1 - \varepsilon \approx \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \quad (10)$$

さらに $\sin t$ を t で展開すると以上より

$$J_n(n\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[n\left(\frac{1 - \varepsilon^2}{2}t + \frac{t^3}{6}\right)\right] dt \quad (11)$$

となる。これをエアリー関数を用いて書きかえるために、エアリー関数を以下のように導入する。

($A_i(z)$ とかかれる)

$$(3a)^{-1/3} \pi A_i[(3a)^{-1/3}x] = \int_0^\infty \cos(at^3 + xt) dt \quad (12)$$

これを用いてさきの近似式を書きかえると

$$a = \frac{n}{6}, \quad x = \frac{n(1 - \varepsilon^2)}{2} \text{ とおき}$$

$$J_n(n\varepsilon) \approx \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} A_i\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1 - \varepsilon^2)\right] \quad (13)$$

一方、エアリー関数は第二種ベッセル関数と関係があり、

$z = \left(\frac{3}{2}\xi\right)^{2/3}$ すなわち $\xi = \frac{2}{3}z^{3/2}$ とおくと以下のようになる。

$$\begin{cases} K_{1/3}(\xi) = \pi \sqrt{\frac{3}{z}} A_i(z) \\ K_{2/3}(\xi) = \pi \frac{\sqrt{3}}{z} A_i'(z) \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{よって、} z = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1 - \varepsilon^2) \quad (15)$$

とおくと(13)、(14)、(15)より

$$\begin{aligned} J_n(n\varepsilon) &\approx \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{z}{3}} K_{1/3}(\xi) \frac{1}{\pi} \\ &= (1 - \varepsilon^2)^{1/2} 3^{-1/2} K_{1/3}(\xi) \frac{1}{\pi} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。同様にして $J'_n(n\varepsilon)$ については

$$\begin{aligned} J'_n(n\varepsilon) &= \frac{1}{n} \frac{d}{d\varepsilon} (J_n(n\varepsilon)) \\ &\approx \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} A_i'\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1 - \varepsilon^2)\right] \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (-2\varepsilon) \frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \frac{z}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi) \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (-2\varepsilon) \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

となり、かつ $\varepsilon \approx 1$ だから(15)に注意して

$$J'_n(n\varepsilon) \approx -\frac{1}{\sqrt{3}} (1 - \varepsilon^2) K_{2/3}(\xi) \frac{1}{\pi} \quad (17)$$

さて、以上の関係を用いて具体的に電場を求めよう。

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \alpha \approx \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\varepsilon = \frac{u}{c} \sin \alpha = \frac{u}{c} \cos \beta \cong \frac{u}{c} \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$$

$$\therefore 1 - \varepsilon^2 = 1 - \frac{u^2}{c^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)^2 \cong 1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} \beta^2$$

ここで $c \cong u$ に注意すると

$$1 - \varepsilon^2 \cong \gamma^{-2} + \beta^2 = \gamma^{-2} (1 + \gamma^2 \beta^2) \quad (18)$$

となる。但し、

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (19)$$

とおいた。

$$\text{また、} \ell = n = \frac{\omega}{\omega_0} \text{であったが、} \omega_c = \omega_0 \frac{3}{2} \gamma^3 \quad (20)$$

とおくと

$$\ell = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{\omega}{\omega_c}$$

となるから

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{n}{3} (1 - \varepsilon^2)^{3/2} \cong \frac{\omega}{2\omega_c} \gamma^3 (\gamma^{-2} + \beta^2)^{3/2} \\ &= \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \beta^2)^{3/2} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。従って

$$\left\{ \begin{aligned} J_n(n\varepsilon) &\cong \frac{1}{\pi} \gamma^{-1} (1 + \gamma^2 \beta^2)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi) \\ J'_n(n\varepsilon) &\cong -\frac{1}{\pi} \gamma^{-2} (1 + \gamma^2 \beta^2) \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

これから電場を計算すると、 $c \cong u$, $\cos \alpha \cong \beta$ と近似して

$$E_{\ell z} \cong c(-A_{y\ell} ik) \cos \alpha \sin \alpha$$

$$= -\frac{k\ell e u e^{ikR}}{2\pi \varepsilon_0 c R} \left\{ J_\ell \left(\frac{\ell u}{c} \sin \alpha \right) \cos \alpha / \frac{\ell u}{c} \right\}$$

$$\cong -\frac{i k e e^{ikR}}{2\pi \varepsilon_0 R} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma^{-1} (1 + \gamma^2 \beta^2)^{1/2} \beta K_{1/3}(\xi)$$

さらに $k = \frac{\omega}{c} = \frac{3}{2a} \gamma^3 \frac{\omega}{\omega_c}$ を代入し

$$E_{\ell z} \cong -\frac{\sqrt{3} i e (\omega/\omega_c) e^{ikR}}{4\pi^2 \varepsilon_0 R a} \gamma (1 + \gamma^2 \beta^2)^{1/2} (\beta \gamma) K_{1/3}(\xi) \quad (23)$$

同様にして、

$$\begin{aligned} E_{\ell x} &\cong c(A_{x\ell} ik) = \frac{e u k e^{ikR}}{2\pi \varepsilon_0 c R} J_\ell \left(\frac{\ell u}{c} \sin \alpha \right) \\ &\cong -\frac{e u k e^{ikR}}{2\pi \varepsilon_0 R c} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \gamma^2 \beta^2) \gamma^{-2} K_{2/3}(\xi) \end{aligned}$$

よって

$$E_{\ell x} \cong -\frac{\sqrt{3} e (\omega/\omega_c) e^{ikR}}{4\pi^2 \varepsilon_0 R a} \gamma (1 + \gamma^2 \beta^2) K_{2/3}(\xi) \quad (24)$$

となる。 e^{ikR} は coherent な因子である。(23)には i がかかっているので(24)と $\pi/2$ だけ位相がずれていることに注意しよう。

7. 放射パワーの角分布の計算

ポインティングベクトルを \mathbf{S} とすると、この方向は $E_{\ell y}$ が $E_{\ell z}$, $E_{\ell x}$ に比べて小さいので y 軸の方向(接線方向)にむいている。この大きさを $S = |\mathbf{S}|$ とすれば真空中では

$$S = \frac{c \varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^* \quad (25)$$

但し、 \mathbf{E}^* は \mathbf{E} の複素共役

よって $E_{\ell z}$, $E_{\ell x}$ のどちらについても

$$S = \frac{3e^2 (\omega/\omega_c)^2 c}{2(4\pi^2)^2 \varepsilon_0 R^2 a^2} g^2 \text{ という形にかける。}$$

但し g は

$$\left\{ \begin{aligned} &\gamma (1 + \gamma^2 \beta^2)^{1/2} (\beta \gamma) K_{1/3}(\xi) \quad (z \text{成分のとき}) \\ &\gamma (1 + \gamma^2 \beta^2) K_{2/3}(\xi) \quad (x \text{成分のとき}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

である。

これに $R^2 d\Omega$ (Ω は立体角) という面積をかけるとその面のうけるパワーが得られる。

$$P_1 = SR^2 d\Omega = \frac{3e^2(\omega/\omega_c)^2 c}{2(4\pi^2)^2 \epsilon_0 a^2} g^2 d\Omega$$

しかしこれは、一つの高調波成分についてのパワーである。 $d\omega$ という幅をとるとこの中には $d\omega/\omega_0$ ケの高調波があるので、 $\omega_0 = c/a$ に注意すれば

$$P_2 = \frac{3e^2(\omega/\omega_c)^2 c}{2(4\pi^2)^2 \epsilon_0 a} \cdot \frac{a}{c} g^2 d\Omega d\omega$$

とかきなおせる。さらに $\omega = 2\pi c/\lambda$ より

$$|d\omega| = \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) d\lambda \quad \text{となるから}$$

$$P_2 = \frac{3e^2(\lambda_c/\lambda)^2}{2(4\pi^2)^2 \epsilon_0 a} \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) g^2 d\lambda d\Omega$$

となる。ここで $d\Omega = d\beta d\psi$ と分解して、 ψ について全周で積分すると、 2π がかかり

$$P = \frac{3e^2(\lambda_c/\lambda)^2}{16\pi^3 \epsilon_0 a} \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) g^2 d\lambda d\beta \quad (27)$$

となる。これは MKS の表式である。これを CGS になおすと以下のようなになる。MKS では

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2_{\text{MKS}}}$$

$$\text{また } c_{\text{MKS}} = 10^{-2} c_{\text{CGS}}, a_{\text{MKS}} = 10^{-2} a_{\text{CGS}},$$

$$e_{\text{MKS}} = \frac{1}{10 \cdot c_{\text{MKS}}} e_{\text{CGS}}$$

これらを代入すると CGS では、

$$P = \frac{3e_{\text{CGS}}^2(\lambda_c/\lambda)}{4\pi^2 a_{\text{CGS}}} \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) g^2 d\lambda d\beta \text{ となる。}$$

以上より軌道面に垂直および平行な電場成分によるパワーは CGS で

$$\left. \begin{aligned} P_p &= \frac{3e^2(\lambda_c/\lambda)^2}{4\pi^2 a} \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) \gamma^2 (1+\gamma^2 \beta^2) (\beta \gamma)^2 \\ &\times K_{1/3}^2(\xi) d\lambda d\beta \\ P_s &= \frac{3e^2(\lambda_c/\lambda)}{4\pi^2 a} \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right) \gamma^2 (1+\gamma^2 \beta^2)^2 K_{2/3}^2(\xi) d\lambda d\beta \end{aligned} \right\} (28)$$

但し ξ は (21) より

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\omega}{2\omega_c} (1+\gamma^2 \beta^2)^{3/2} = \frac{\lambda_c}{2\lambda} (1+\gamma^2 \beta^2)^{3/2} \\ \lambda_c &= \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{2\pi c}{\omega_0 (3/2) \gamma^3} = \frac{4}{3} \pi a \gamma^{-3} \quad (\because \omega_0 = \frac{c}{a}) \end{aligned} \right\} (29)$$

である。但しこれは全周について積分したパワーであるから、もしスリットを見込む水平方向の角が θ であれば、 $\frac{\theta}{2\pi}$ をかける必要がある。

$P_p + P_s$ を β について積分した結果は、結果だけをかくと、CGS では

$$P' = \frac{3^{3/2}}{16\pi^2} \left(\frac{e^2 c}{a^3}\right) \gamma^7 \left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^3 \left[\int_{\lambda_c/\lambda}^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta \right] d\lambda \quad (30)$$

となる。以上について計算器で計算するのは容易である。その際、第二種ベッセル関数については、収束の早い、積分表示

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t - z \cosh t} dt \quad (31)$$

を用いればよい。またこの不定積分は

$$\int K_\nu(z) dz = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2 \cosh t} e^{-\nu t - z \cosh t} dt \quad (32)$$

となるから P' の計算に用いることができる。

以上のように、 $u \approx c, \alpha \approx \pi/2$ という条件のもとでは、第二種のベッセル関数を用いた表現が得られた。この表式は、数値計算する場合は式(31)や(32)を利用できるので便利である。ただし、通常のベッセル関数を用いた公式(5)は、 $u \approx c, \alpha \approx \pi/2$ という条件を前提としていないので、より一般性

がある。

また、変数を $\lambda \rightarrow \omega$ に変換したり、パワーでなく光子数の表示にするのは簡単な算術であるので、読者の皆様がそれらの公式を導けると思う。

付録 I

ベッセル関数の積分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{i(n\theta - z\sin\theta)\} d\theta \quad (33)$$

および母関数表示

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n \quad (34)$$

を考える。(34)式を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \exp\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{2} J_n(z) t^n + \frac{z}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^{n-2} \end{aligned}$$

これを(34)式と比較すると

$$(n+1) J_{n+1}(z) = \frac{z}{2} (J_n(z) + J_{n+2}(z))$$

これから

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \quad (35)$$

(34)式を z で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \exp\left\{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(z) t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} J_n(z) t^{n+1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} J_n(z) t^{n-1} \end{aligned}$$

したがって

$$J_n'(z) = \frac{1}{2} (J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) \quad (36)$$

さて、問題の式を X とすると

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\theta \exp\{i(n\theta - z\sin\theta)\} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \exp\{i(n\theta - z\sin\theta)\} d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \exp\{i\{(n+1)\theta - z\sin\theta\}\} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \exp\{i\{(n-1)\theta - z\sin\theta\}\} d\theta \right] \end{aligned}$$

と変形し、(35)式を用いればよい。

また

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \exp\{i(n\theta - z\sin\theta)\} d\theta$$

についても同様に变形して(36)式を用いればよい。

付録 II

(33)を用いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \exp\{i(n\theta - z\sin\theta)\} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \exp\{-i(n\theta - z\sin\theta)\} d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[J_n(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} \exp\{i(nt - z\sin t)\} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [J_n(z) + J_n(z)] = J_n(z) \end{aligned}$$