解説

X線望遠鏡の特性

津坂 佳幸*,山下 廣順**,国枝 秀世**
*分子科学研究所極端紫外光科学研究系 **名古屋大学理学部

Characterization of X-Ray Telescopes on board ASCA

Yoshiyuki TSUSAKA*, Koujun YAMASHITA** and Hideyo KUNIEDA**

*Department of Vacuum UV Photoscience, Institute for Molecular Science, **School of Science, Nagoya University

The X-ray properties of multi-nested thin foil mirror X-ray Telescopes (XRT's) on board ASCA satellite were fully evaluated with an X-ray pencil beam. Scanning over the telescope aperture of 35 cm with an X-ray pencil beam, we found the effective area of XRT to be 20 - 30% less than the value derived from the ray tracing calculations under the ideal condition. The Point Spread Functions (PSFs) of XRT were derived by measuring the image profile at the focal plane with an X-ray CCD. The PSF is found to exhibit a sharp core concentrated within 30 arcsec and a broad wing extended with 3 arcmin in Half Power Diameter (HPD). We also evaluated the contribution of the stray light, which is caused by the single reflection of X-rays by primary or secondary mirrors and by the back side reflection of the mirrors. To obtain the characteristics of XRT in the energy range of 0.5-10 keV, incorporated with the measurement at discrete energies, a ray tracing method is developed with the telescope design parameter, PSF, and optical constants. Especially optical constants around gold M absorption edges are obtained by measuring the reflectivety of our mirror sample, using monochromatized X-rays in the energy range of 2.0 - 3.5 keV from a synchrotron radiation. Taking into account of the PSFs and optical constants, our ray tracing program can reproduce all these XRT performances.

1. はじめに

X線光学の応用分野として, 軌道放射光と共に 重要な柱は天文学である。X線天文学は, 大気吸 収に阻まれ, ロケットや人工衛星の利用が可能に なった1960年代に始まったばかりの学問分野であ る。対象は宇宙の中でも最も活動的で高温な領域 である太陽や星のコロナ, 超新星, ブラックホー ル, 銀河及び銀河団など多岐にわたる。しかしそ の強度はもっとも明るいX線天体の1つである蟹 星雲からでさえ、1photon/cm²/sしかなく、地上の実験室でのX線強度の数桁から十数桁微弱なものである。このため、大きな有効面積で長時間露光しなければ精密な観測は行なえない。また、飛翔体に搭載して大気の外に出て観測するため、装置は小型軽量でかつ、打ち上げ時の激しい振動衝撃に堪えなければならない。こうした実際上の違いはあるものの、X線光学系として、地上実験特に軌道放射光における光学系と基礎的なテクノロ

TEL 0564 - 55 - 7443 FAX 0564 - 53 - 7327

e-mail tsusaka @ ims. ac. jp

^{*}分子科学研究所 極端紫外光科学研究系 〒444 愛知県岡崎市明大寺町字西郷中38

ジーは共通している。

ここで取り上げた,あすか衛星は1993年2月に 打ち上げられた日本で4番目のX線天文衛星であ り、我々としては初めて本格的な X 線望遠鏡を搭 載した。特に10keVまでの集光結像を目指し、結 像性能としては3分角と中程度ではあるものの, 超軽量ながら大面積を実現している。望遠鏡の開 発製作はNASA ゴダード宇宙飛行センターのSerlemitsos博士らと、名古屋大学理学部 X 線天文グ ループが中心となって行なった。その特性試験は 日本側が主に担当し、望遠鏡の X 線集光特性の正 確な理解と、観測データの正しい解釈のための基 礎データを取得することができた。本稿は特にこ こに焦点をあてており、そこで得られた知識とそ れを取り入れた光線追跡法等の技法が、放射光に 於ける光学素子の設計評価の参考になれば幸いで ある。

あすか衛星は打ち上げ後2年余り経った現在 も、この波長域(0.5-10keV)で世界唯一の衛星と して稼働しており、その間に観測した1000個近く の天体について、世界中の研究者とともにその結 果の解析を進めているところである。

2. X 線天文学

中性子星やブラックホール近傍の強重力場中の物質や、超新星残骸或いは銀河団を満たす1千万度~1億度の高温プラズマなど、物質の極限状態では X線が放射される。このため、さまざまな天体現象の中でも特に、活動的な領域の研究には X線観測は不可欠であり、また、宇宙の構造と進化の研究においても、今や X線天文学は重要な柱の一つとなっている。 X線観測において、より遠方の即ちより暗い天体まで精度良く観測するためには X線望遠鏡の開発が不可欠である。しかしながらその開発は、可視光域とは異なった多くの問題を抱えている。すなわち、 X線領域では物質の屈折率が1に比べて僅かに小さい値であるため、極端な斜入射の光子に対してしか、有効な反射率が得

られないことに起因している。

人工衛星に初めてX線望遠鏡を搭載したのは、1978年にアメリカによって打ち上げられたEINS-TEIN衛星である¹⁾。このX線望遠鏡は、Wolter I型と呼ばれる光学系をガラスの基板を研磨して忠実に再現したもので、空間分解能6秒角、エネルギー帯域は4keV以下であった。それまでの衛星が、検出器の前に視野を絞るコリメーターを置くことでX線天体の位置を調べたのに対し、撮像能力を持ったこの衛星は、近傍天体からのX線の漏れ込みを防ぐことができ、また集光によってS/Nが格段に向上したことで、その検出感度は過去の衛星に比べ2桁以上向上した。

我が国においては、「はくちょう」、「てん ま!, 「ぎんが!とコリメーター衛星ではあるが, 大有効面積、広いエネルギー帯域の検出器と低雑 音化によって、世界の第一線のレベルに達した。 1993年2月に打ち上げられた「あすか」衛星では日 本初の X線望遠鏡³⁾ を搭載した衛星で、検出器に X線CCDカメラ⁴⁾ と撮像型蛍光比例計数管⁵⁾ を搭 載し、0.5-10keVのX線領域で世界初の撮像分光 観測を可能にした。「あすか」に搭載された X 線望 遠鏡は多重薄板型のと呼ばれ、空間分解能はやや 劣るが、小型・軽量でありながら、大有効面積、 高エネルギー帯域 (< 10keV) までの感度が特徴で ある。大きな有効面積は,非常に微弱な X線(10⁻⁶ counts/s/cm²) の集光に役立ち、高エネルギー帯 域までの感度は、天体の広帯域X線スペクトル測 定、特に鉄のK輝線(~7keV)まで感度を有する ことで宇宙物理学上重要な情報を引き出すことが できる。

3. X 線望遠鏡

3.1 X線の反射と散乱

X線領域の物質の屈折率は1に比べて僅かに小さく、複素屈折率nを用いて次のように表せる。

$$n=1-\delta-\,i\,\beta,\quad \delta=\frac{N_a\,r_e\,\lambda^{\,2}\,f_{_1}}{2\,\pi},\quad \ \beta=\frac{N_a\,r_e\,\lambda^{\,2}\,f_{_2}}{2\,\pi}$$

ここで、 δ 、 β はそれぞれ位相のずれ、吸収を表 す因子であり、Na, re, λはそれぞれ原子密度, 古典電子半径, X線の波長である。f₁, f₂は原子 による散乱、吸収を表す因子で、これは元素の種 類とX線の波長によって決まる。 δ , β は1に比 べて非常に小さな値で、例えば金の7keVに於ける δ . β はそれぞれ 6×10^{-5} , 8×10^{-6} 程度である。 屈折率が1に極めて近いことから、 X線をレンズ で集光することはほとんど不可能である。しかし ながら屈折率が1より小さいことで、可視光領域 とは対照的に、真空から物質に適当な入射角で入 射するときにX線の全反射が起こる。スネルの法 則より、吸収を無視すると、 $\cos\theta_c = 1-\delta$ であ り、 $\delta \ll 1$ より、 $\cos \theta_c \sim 1 - \theta_c^2 / 2$ だから、 $\theta_c =$ $\sqrt{2\delta}$ である。ここで θ 。は表面から測った臨界角 で、例えば金の7keVに於ける臨界角は0.6度であ る。

屈折率 n_1 , n_2 を持つ 2 つの物質の界面での P 偏光, S 偏光に対する反射振幅 r_s , r_p は, フレネルの式により,

$$r_{s} = \frac{n_{1}sin\theta_{1} - n_{2}sin\theta_{2}}{n_{1}sin\theta_{1} + n_{2}sin\theta_{2}}, \quad r_{p} = \frac{n_{1}sin\theta_{2} - n_{2}sin\theta_{1}}{n_{1}sin\theta_{2} + n_{2}sin\theta_{1}}$$

$$(2)$$

で与えられる。ここで、 θ_1 、 θ_2 はそれぞれ表面から測った入射角、屈折角であり、スネルの法則によって $n_1\cos\theta_1=n_2\cos\theta_2$ で与えられる。反射強度はそれぞれ複素共役をとり、 $R_s=r_sr_s^*$ 、 $R_p=r_pr_p^*$ である。全反射を用いる場合、その入射角は極端な斜入射であるから、その反射率はほとんど偏光には依らない n 。全く偏光がない場合反射率は、 $R=(R_s+R_p)/2$ であり、これは臨界角 θ_c で規格化すると次式のように表せる。

$$R = \frac{h - x\sqrt{2(h-1)}}{h + x\sqrt{2(h-1)}},$$
 (3)

$$h = x^2 + \{(x^2 - 1)^2 + a^2\}^{1/2}, \quad x = \frac{\theta}{\theta_c}, \quad a = \frac{\beta}{\delta}$$

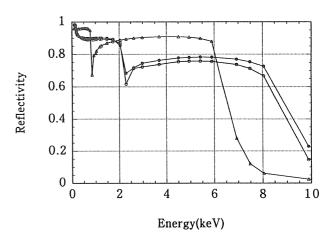


Figure.1 Reflectivity versus X-ray energy at 0.5 degree incidence. Open circles, filled circles are represent Au, Pt, and Ni surfaces, respectively.

X線の反射率は、(3)式から求められる。吸収の効果は β/δ で効き、 β が0の極限では、臨界角以下の斜入射角で入射したX線の反射率は1になる。よって反射物質には、密度が大きく、 β/δ が小さい、物理、化学的に安定な物質が選ばれる。通常、金、プラチナ、ニッケル等がよく用いられる。図1に斜入射角0.5°のときの金、プラチナ、ニッケルの反射率をX線エネルギーの関数で示す。

実際の反射鏡では表面の酸化,或いは不純物の吸着といった化学的原因や,形状形成時の誤差である物理的原因で完全に滑らかな表面は実現できない。このような鏡面の凹凸が光の波長と同程度である場合,入射した光は散乱されてしまう。 X線の場合その波長はオングストロームレベルであるため,反射鏡の小さな凹凸でも散乱が起こり,結像性能の劣化や反射率の低下を引き起こす 8-10)。

X線の散乱は、表面の凹凸の間隔 *l* が連続的に変化する回折格子として考えることができる。即ち、

$$n\lambda = l\left(\cos\theta_i - \cos\theta_s\right) \tag{4}$$

で、nは回折の次数、 λ は X線の波長、 θ 、 θ 、 δ 。 表面から測った入射角、散乱角である。散乱光の 強度は、凹凸の振幅の 2乗に比例する。反射鏡表 面の凹凸は様々な波長の正弦波で記述する事ができ、その表面の凹凸を表す関数として Power Spectral Density (PSD) 関数: W (p) が用いられる。ここで、pは表面波長lの波の波数 (p = 2 π /l) であり、(4) 式でn=1とおくと、

$$p = \frac{2\pi}{\lambda} (\cos\theta_s - \cos\theta_i) \tag{5}$$

である。表面上の点xにおける凹凸の高さがZ(x)のとき、そのPSD関数はフーリエ成分の2乗で表される。

W(p) =
$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \int \exp(ipx) Z(x) dx \right\}^2$$
 (6)

このとき散乱角 θ 。に散乱されるX線の強度は、

$$\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{d}\theta_{\mathrm{s}}} = \frac{2\,\mathrm{k}^{3}}{\pi}\,\mathrm{I}_{\mathrm{r}}\sin\theta_{\mathrm{i}}\sin^{2}\theta_{\mathrm{s}}\,\mathrm{W}(\mathrm{p})\tag{7}$$

である。ここで $k=2\pi/\lambda$, I_r は全反射強度である。(7)式より X線の散乱強度の角度依存性を測定することによって,表面の PSD 関数を直接求めることができる。W(p) と表面の凹凸の rms (root mean square) 高さ σ は次式で結ばれる。

$$\sigma^{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} Z(\mathbf{x})^{2} d\mathbf{x} = \frac{1}{2\pi} \int W(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

$$= \frac{1}{4k^{3} I_{r}} \int \frac{1}{\sin\theta_{s} \sin^{2}\theta_{s}} \frac{dI}{d\theta_{s}} d\theta_{s}$$
(8)

また、全反射強度と散乱 X線 (I_s) の強度 (1次光) の比は、

$$\frac{I_s}{I_r} = 1.2 \times 10^{-2} \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\theta_i}{0.5}\right)^2 \tag{9}$$

となる。斜入射角 0.5度のとき,波長 1.9 Å(鉄 K 輝線)の X線の散乱強度を 10 %以下に押さえるためには, $\sigma=5$ Å以下が必要になる。 σ が入射 X 線の波長より長くても良いのは 0.5 の浅い斜入射角で入射するため,実際の光路差は σ よりずっと

短いからである。

3.2 X線望遠鏡の製作

現在X線望遠鏡に最も良く用いられている光学 系は,回転放物面と回転双曲面を組み合わせた Wolter I型¹¹⁾ である(図2)。X線望遠鏡は微弱な X線を集めるため大きな有効面積が必要である が、斜入射の Wolter I型の開口面積は反射鏡面の 入射面への投影部であり、例えば斜入射角1度の 場合の開口面積は、実際の反射面の面積の0.017 倍(sin 1°)である。そこで普通 X線望遠鏡は有効 面積を上げるために、同じ焦点距離で口径の違う Wolterミラーを同心円状に積層する方法(ネステ ィング)が用いられる。しかしながら地球大気に よって吸収される天体 X 線の観測には、ロケッ ト、人工衛星等が必要であり、そのため観測機器 には大きさ、重量等の厳しい境界条件が課せられ る。これら境界条件の中で解像力、集光力を高 め、エネルギー帯域を広くする努力が行われる。 このうちどの性能を重視するかで、X線望遠鏡は 研磨型,レプリカ型,多重薄板型の3つのタイプ に分かれる。

〈研磨型〉

望遠鏡の解像力を追求した製法で、鏡面基板である厚さ10~20mmのガラスを直接研磨してWolter I型の光学系を忠実に実現する。現在の技

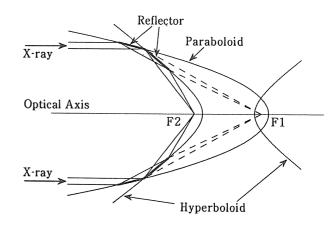


Figure.2 Wolter type I geometry. The focus point of paraboloid is F1, and those of hyperboloid are F1 and F2. X-rays are focused on F2.

術水準では空間分解能 1 秒角以下が可能であるが、厚い基板を用いるためネスティング数を増やすことができない。これまでの衛星では斜入射角を大きくして有効面積を上げているが、そのためエネルギー帯域も狭く 4keV以下である。また厚いガラス基板を用いるため、その重量は 500kg~1tと非常に重い。このタイプの望遠鏡を搭載した衛星は、1978年の EINSTEIN 衛星120 、1990年のROSAT衛星130 があるが、いずれも数 100 年の展である。開口効率(100 年の最大口径に対する幾何学的集光面積の比)は、EINSTEIN が 17 %、ROSAT が 10 20 %である。

〈レプリカ型〉

空間分解能,開口効率,重量とも研磨型と多重薄板型の中間的な性能が得られる。製法は,まずガラスの母型を研磨し,そこに金などの反射面となる元素を蒸着する。その外側にCFRP等の基板を被せ,間にエポキシ樹脂を流し込み固める。その後円筒を母型から離すと金と母型が剥がれ,CFRP基板に金と母型の形状を写し取ることができる。空間分解能は30秒角程度である。この方法で作られたのはEXOSAT衛星の望遠鏡¹⁴⁾である。また,ヨーロッパで現在計画中のXMM計画^{15,16)},あすか衛星に次ぐ日本のX線天文衛星ASTRO-E(2000年打ち上げ予定)もこの方法で,X線望遠鏡の開発を行っている。

〈多重薄板型〉

1981年 Serlemitsosが提案したもので、空間分解能を犠牲にする代わり大有効面積、広エネルギーバンド、軽量という特徴を持っている®。Wolter光学系を忠実に再現する限り、その鏡面基板は研磨に耐え得るよう厚いものとなってしまい、開口効率が悪く重量も大きくなる。この多重薄板型では、Wolter型の2次曲面を円錐で近似することで研磨処理を行わず、基板を0.1mm程度まで薄くして50%以上の開口効率を達成できる。軽量な基板を用いることで、望遠鏡重量は他の製法に比べ極端に軽くできる。有効面積は100層以上のネステ

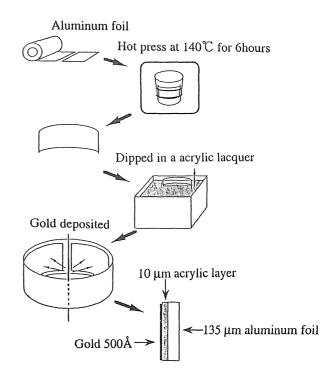


Figure.3 Reflector preparation. An aluminum foil is bent in a conical shape by using a hot press method with a conical mandrel. The shaped foil is coated with acrylic lacquer and gold layer for X-ray reflection.

ィングによって稼ぐことができるため、入射角を小さくして高エネルギー領域まで感度を持たせることが可能である。この手法を用いた望遠鏡は、スペースシャトルミッションのBBXRT¹⁷とあすか衛星である。図3にあすか X 線望遠鏡の反射鏡製作法を示す。あすか X 線望遠鏡では厚さ0.13mmのアルミフォイル基板を母型に押しつけて熱成形する。 X 線反射面に必要な滑らかな表面は、アクリルを10-20μmコーティングして作り¹⁰⁾ 、反射面には金を500 Å蒸着する。こうしてできた反射鏡120枚を、扇型の鏡筒に同心円状に並べ、120本の溝が切られたスポークによって位置決めが行われる(図4)。この鏡筒4台を円筒型に結合して望遠鏡1台が完成する。あすか衛星はこの望遠鏡を4台搭載した。

異なる3つの手法で作られた(作られる)代表的な X線望遠鏡の性能を表1に示す。

4. X線望遠鏡の性能評価実験

天体の観測データを正しく理解するためには、 それぞれの装置の応答関数を精度よく知る必要が ある。我々はあすか X 線望遠鏡の応答関数を決定

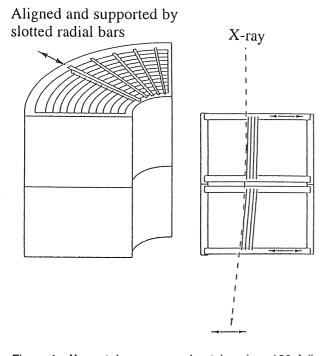


Figure.4 X-ray telescope quadrant housing. 120 foil reflectors are installed in each of two layers. Slotted radial bars supported the reflectors in the each housing.

するため地上較正, 軌道上較正, レイトレーシン グ法の確立を行った $^{18, 19)}$ 。

X線望遠鏡の地上較正には、図5示す宇宙科学 研究所の30m X線ビームライン²⁰⁾ を用いた。この ビームラインの最上流には回転対陰極型のX線発 生装置があり、ターゲットにはAI、Ti、Cu等が 準備されている。ターゲットで発生した特性X線 と制動放射による連続 X 線は、長さ 30m のダクト に導かれ、4極スリットによって細く絞られる。4 極スリットでビームを1mmに絞るときその平行度 は arctan (1mm/30m) ~7秒角である。発生装置 と4極スリットの間には、ダクト内反射成分の漏 れ込みを防ぐための直径 20mm のピンホールが 3 箇所に設置される。X線の単色化は金属フィル ターを用いる。サンプルチャンバーには X線の進 む向きをX軸、鉛直上向きをZ軸としたときの Y, Z方向の平行移動とX, Z軸回りの回転が可 能なステージが設置され、サンプルの任意の位置 に任意の入射角でX線を照射することができる。 サンプルによって反射或いは回折したX線は、測 定チャンバーの XYZステージにセットされた X線

Table 1 Main characteristics of typical X-ray telescopes

	EINSTEIN	XMM	ASCA
Fabrication method	Polishing	Replication	Multi-nested thin foil
launch	1978	1999	1993
Focal Length (mm)	3400	7500	3500
Diameter (mm)	330 — 560	306 - 700	120 — 344
Incident angle (deg.)	0.7 - 1.2	0.29 - 0.67	0.24 - 0.70
Reflecting surface	Ni	Au	Au
Mirror substrate	Glass (Zero Dewar)	CFRP	Al foil (acrylic lacquer)
Reflector thickness (mm)	20	0.6 - 1.4	0.135
Mirror Length (mm)	510	300	100
Number of reflector	4	58	120
effective area (cm²)			
(1keV)	400	5000 (3 set)	1300 (4 set)
(7keV)	erania (h. 1884). 1888 - Arthur II. aren (h. 1884).	2500 (3 set)	600 (4 set)
weight (kg)	500	510 (3 set)	40 (4 set)
Angular resolution (arcsec.)	6	30	180

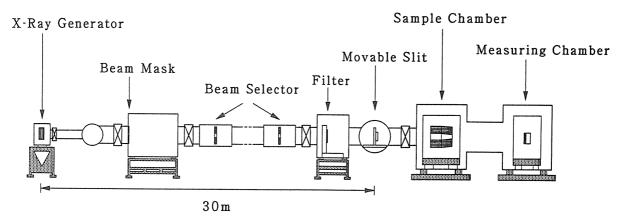


Figure.5 The 30 meter long X-ray beam line at Institute of Space and Astronautical Science. The distance between X-ray source to a slit is 30 meter. The 3.5 meter X-ray telescope can be accommodated in two large chambers. Total volume is separated into 6 sections by 5 gate valves indicated by cross marks.

検出器によって、その位置、エネルギーが測定される。X線検出器には、ガスフロー型比例計数管、一次元位置検出型比例計数管、X線CCDカメラが準備されている。このビームラインで得られるX線ビームでは、有意な強度の空間非一様性、時間変動とも観測されていない。測定中全系はターボ分子ポンプにより10-5 torrまで排気される。

4.1 有効面積

宇宙研 30m X線ビームラインでは口径 350mmの X線望遠鏡を一度に照射できない。そこで地上較 正実験では、4極スリットで細く絞ったペンシル ビームでX線望遠鏡の開口部をくまなく走査する 方法をとる。もちろんX線ビームは固定なので、 X線望遠鏡と検出器を同期して走査する。有効面 積の測定においては X 線ビームを 5mm に絞った。 これは約30秒角の発散光に対応し、この発散角に よる影響は十分無視できるほど小さい。X線検出 器には直径12mmの入射窓を持つ比例計数管を用 いた。直径12mmを越える領域の光量は、一次元 位置検出型比例計数管を用いて測定した。その結 果60mmと12mm内に含まれる光量の比として, 1.08 (1.5keV), 1.15 (4.5keV), 1.17 (8.0keV) が 得られた。これは反射鏡表面凹凸の空間周波数 0.01-0.2mm⁻¹に対して、3~5 Åの表面粗さで説

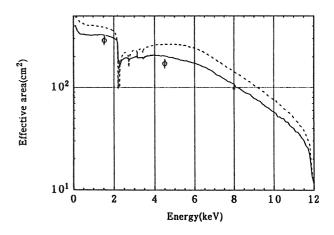


Figure.6 Effective area of an ASCA XRT versus photon energy. The circles represent the measured results, and the dashed and solid curves are derived from the calculation based on an ideal case and a modified case, respectively (see section 5 in text.)

明できる。これらの補正を加えた有効面積の測定 結果を図6に示す。ここで得られた有効面積の絶 対値は、理想的なレイトレーシングから求めた値 に比べ20-30%程度小さい。

X線望遠鏡の光軸と入射 X線のなす角(off-set angle)が大きくなると、有効面積は減少する。これは X線の反射率の低下以上に、それぞれの反射鏡はそのすぐ内側の反射鏡の影になるからである(shadowing effect)。この効果は高エネルギーの X線ほど厳しい。すなわち X線のエネルギーが高くなるに従って、その反射率は望遠鏡のより内側の

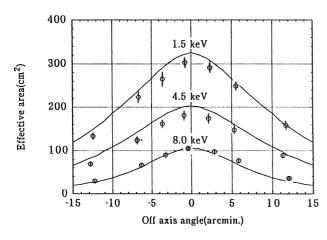


Figure.7 Measured and calculations (solid line) effective area versus off-axis angle at 1.5, 4.5, and 8.0 keV. The field of view is 24, 22, 18 arcmin in FWHM, respectively.

(より入射角の小さい) 反射鏡ほど相対的な効率が高くなる。そしてこの内側の反射鏡は、より密に詰められているため shadowing effect が大きくなるからである。有効面積の入射角依存性も上述と同様の方法で測定した。図7に有効面積の入射角依存性の測定結果を示す。あすか X 線望遠鏡の視野は半値幅で、それぞれ 24arcmin (1.5keV)、22arcmin (4.5keV)、16arcmin (8.0keV)である。

4.2 結像性能

結像性能の測定では、X線ビームの平行度を上げるため 4極スリットを 2mmに絞り(15秒角の発散光),検出器に X線 CCD を用いた。有効面積の測定と同様,開口部をくまなく走査する。図 8 に 4.5keVの X線で得られた像を示す。 90度 おきの切れ込みは,鏡筒の影である。これらの図から分かるようにあすか X 線望遠鏡の点源像は広い分布を示すが,中心部に非常に鋭いピークを持つ。これは,斜入射光学系の特徴であり $^{21,22)}$,以下のように理解することができる。いま反射鏡の法線べクトルの揺らぎを $d\theta$ とする。X 線望遠鏡の半径 R の位置に入射した X線は,その反射鏡の法線揺らぎに従って焦点からずれたある点(dF_x , dF_y)に到達する。このとき, $dF_x = 2d\theta \times FL$, $dF_y = 2d\theta \times R$ である。ここで FL は焦点距離であり,X 方向

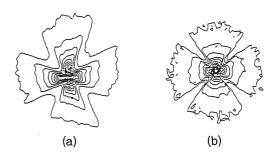


Figure.8 XRT images of a point source at 4.5 keV: (a) Measured on axis image. (b) Image derived from the modified ray-tracing calculations.

はR方向に平行にとった。あすか X 線望遠鏡の場合その焦点距離は 3500mm であり、半径は 60mm から 170mm であるから、 dF_x と dF_y の比は、 dF_x dF_y = $3500/(60\sim170)$ = $20\sim60$ である。結果、ある微小領域で反射した X 線像はその radial 方向に $20\sim60$ 倍引き延ばされる。 X 線望遠鏡全体の点源像は、この引き延ばされた微小部分像をその光軸回りに重ね合わせたものであり、これによって中心部に鋭いピークを構成する。

X線望遠鏡の点源像を定量的に評価する方法 に、PSF (Point Spread Function) と EEF (Encircled Energy Function) がある。PSFは像の中心 から距離rの位置での平均輝度であり、 EEF は PSFの積分表示つまり半径rの円で囲まれた領域に 含まれる全エネルギーで、単色X線の場合は光子 の個数に等しい。EEFは普通、適当な領域で規格 化する。我々はこの規格化する領域として、焦点 面上の直径12mm(~12分角)の円を選んだ。点 源像の PSFと EEFを図9に示す。 PSFが r = 0近傍 で平坦になっているのは、X線ビームの拡散光の ためであり、 X線ビームの発散角 15秒角に一致し ている。この PSF は、平坦部を除く中心部分(半 径1分角以内)が(ガウス分布/半径)で、その外 側は指数関数でよく合う。このためX線望遠鏡の 分解能の指標に、 PSFの半値幅を使うのは適当で はない。つまり、(ガウス分布/半径)で表される PSFの中心部は特異点であり、その半値幅は検出 器の位置分解能を上げれば上げるだけ小さくなる。

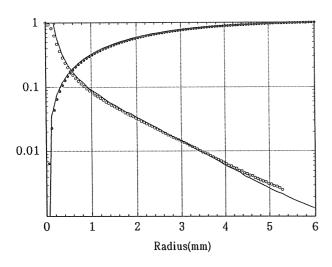


Figure.9 Measured PSF (open circles) and EEF (field circles) at 4.5 keV. The solid curves are calculated by the ray tracing.

そこで X 線望遠鏡の角分解能には、HPD(Half Power Diameter)がよく用いられる。これは望遠鏡が集光した光量の内、半分の光量が含まれる半径を言う。あすか X 線望遠鏡の場合、反射した X 線は広く分布するため、その HPD は約 3 分角である。しかし、その点源像は中心に鋭いピークを持っため、約 30 秒角離れた点源でも分解が可能である。

4.3 迷光

望遠鏡の視野を大きく越えた off-set angle 0.5-1.5度で入射した X線は、通常の 2回反射をせずに 焦点面に達する場合がある。これを迷光と呼ぶ。この迷光は目的の観測に対してはバックグラウンドであり、 X線望遠鏡の検出能力を下げる。このため迷光が通過するパスやその特性を把握することは重要である。通常の X線望遠鏡には迷光のパスとして、1)一段目のみで反射した X線 2)二段目のみで反射した X線 3)一段目、二段目の両方ともに当たらない直接 X線が考えられる。あすか X線望遠鏡の場合は更に、4)反射鏡の背面で反射した X線も迷光のパスとしで存在する。これはあすか X線望遠鏡の反射鏡の両面に、表面粗さを押さえるためのアクリルコーティングがディップ 法により施してあるためで、これは低エネルギーのX線に対しては効率の良い反射面となる。この迷光を防ぐ方法として他のX線望遠鏡では迷光ストッパーを置く方法も採られているが、多重薄板型の場合、反射鏡と反射鏡の間隔が~1mmと狭く、このようなストッパーを置くことは事実上不可能である。

あすか衛星の検出器の一つである撮像型蛍光比例計数管を用いて得られたあすか X 線望遠鏡の迷光のパターンをレイトレーシングの結果とともに図 10 に示す。迷光の分布はレイトトレーシングの結果と良く一致し、その絶対強度も 10 %程度の範囲内で一致している。

5. 光線追跡法(レイトレーシング法)

地上で行われる較正は、飛び飛びのエネルギー或いは入射角での有効面積、PSFの決定であり、また軌道上においてもその入射角は飛び飛びである。これらの結果から、任意のエネルギー、入射角を持つ光子が望遠鏡を通してどのように振る舞うかを知るためにはレイトレーシング法の開発は不可欠である。較正によって得られた性能を反映させたレイトレーシング法を確立することによって、任意の観測における有効面積とPSFのエネルギーおよび入射角依存性を供給することができる。またこれによって有効面積や結像性能の劣化の原因を定量的に明らかにでき、将来のX線望遠鏡の開発方針を示すことができる。

あすか X 線望遠鏡のレイトレーシングでは、まずあるエネルギー、ある方向ベクトルを持った X 線を望遠鏡の全面から打ち込む。このとき X 線望遠鏡の入射面での光子の位置はランダムに決められる。その後光子はその方向ベクトルに従って進み、1段目の反射鏡に当たるかどうか判断される。反射鏡に当たった光子はその反射率に従って、反射(散乱を含む)或いは吸収される。反射した X 線の方向は、ある確率分布に従って選ばれる。これは、反射ビームの広がりや散乱を考慮したもので

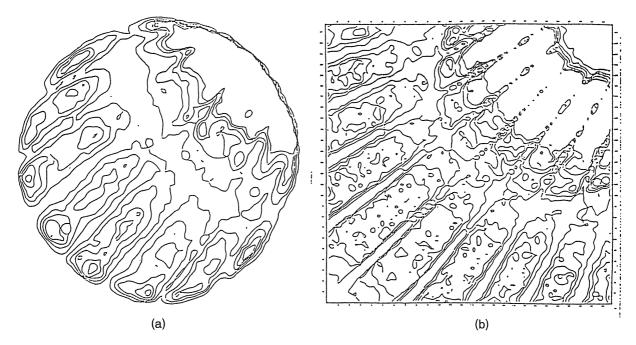


Figure.10 Distribution of stray photons from a source at an off-axis angle of 1 degree in the direction of the top right corner: (a) observed GIS image, in which the aperture is 50 mm diameter and the distribution is compressed near the detector edge due to the response. (b) from the ray tracing. The lower left region is contaminated by photons reflected by backside surface and the upper right region is contaminated by the photons reflected only on secondary mirrors.

ある。光子の反射或いは吸収,反射光子の方向の 決定はモンテカルロ法で行う。その後光子はその 方向ベクトルに従って,次の反射鏡へと進んでい く。このレイトレーシングでは,有効面積の計算 に40,000個の光子について,結像性能を求めると きは,1,000,000個の光子についてシミュレーションを行った。

5.1 反射率

3.1で述べたように、X線の反射率はその光学 定数によって(3)式から計算される。しかしなが ら現在まで、信頼性の高い光学定数のデータセッ トは存在しない。この原因はX線領域の物質の屈 折率は、表面の粗さ、酸化、吸着等の影響を受け やすく、従って製作方法の違いによるところが大 きいからである。特に屈折率が不連続に変化する 吸収端ではこの傾向が大きい。このため、我々は あすかX線望遠鏡の金の反射鏡に対してその光学 定数を、その反射率測定と軌道上較正のデータか ら求めた。以下この光学定数の決定について述べる。

あすか X 線望遠鏡の反射鏡サンプルを、 AI-K (1.5keV), Ti-K(4.5keV), Cu-K α (8.0keV) \mathcal{O} 特性X線を用いて反射率を測定した。また金のM 吸収端付近の反射率測定は、分子科学研究所 UV-SOR 施設の BL-7A の単色 X 線を用いて行った。 その結果を図11,及び図12に示す。光学定数 は, 反射率測定の結果を(3)式を用いて, 光学定 数をフリーパラメータとしたフィッティングによ り決定する。この手法を特性 X 線の結果と UV-SOR BL-7A の結果の両方に適用するのである が、UVSORのデータでは、各々のエネルギーに 対して, 角度の関数で見た反射率の結果は, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.2度の5点しか存在しな い。この5点に対して、光学定数 δ 、 β の2つのフ リーパラメータでフィッティングを行うと、それ ぞれが大きな決定誤差を持ってしまう。そこで、 フィッティングは β を固定のもとで行った。この

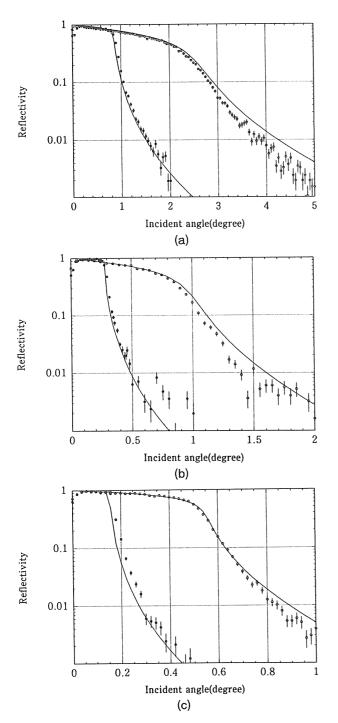


Figure.11 Results of the reflectivity measurements. (a), (b), (c), the reflectivity of the ASCA reflector at 1.5, 4.5, and 8.0 keV, respectively. The open and filled circles represent the reflectivity of the front (gold) and back (acrylic lacquer) surfaces The solid curves are from the calculations with the surface micro roughness of 5Å.

理由は、 β は X線の吸収に関連づけられる因子であり、その測定方法は単純でかつ過去権威あるデータセットが何例かそろっているからである。フィッティングに用いた β の値は、Henke et. al. 23

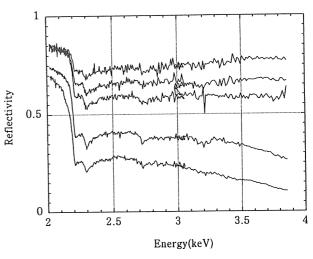


Figure.12 Results of the reflectivity measurements at UVSOR BL7A. Gold M absorption edge structures are clearly seen at 2.21, 2.29, and 2.74 keV.

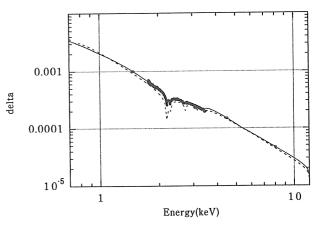


Figure.13 Optical constants, δ . The open and filled circles are derived by the fitting of the reflectivity measurements in Fig.11 and Fig.12, respectively. The solid curve represents the δ installed in the modified ray tracing program, and dotted curve is calculated by the use of the empirical formula.

を参照した。

と、経験関数によって決められた δ も合わせて示す。

5. 2 Broadening Effect

多重薄板型のあすか X 線望遠鏡は、その設計値 から計算される理想的な結像性能は HPDで 0.5分 角である。しかしながら、実際のHPDは約3分角 にとどまっており、その主な原因は、 a) 表面粗さ による X線散乱, b) 反射鏡の形状誤差, c) 個々 の反射鏡のミスアラインメントによる反射ビーム の広がりである。そしてこの反射ビームの広がり は単にX線像の質を下げるだけでなく、有効面積 の減少をも生み出す。反射鏡の不完全性のため設 計の軌道から外れた光子の中には、すぐ内側の反 射鏡の背面に当たるものや、2段目の反射鏡に当 たらないものがある。こういった光子が焦点面に 達する場合は即ち迷光であり、反射ビームの広が りは、光軸方向からきた光子に対してもこのよう な迷光を生み出す。特に多重薄板型の場合、反射 鏡は密に詰め込まれているため、内側の反射鏡の 背面に当たる光子が多い。ここではこれら反射 ビームの広がりを、個々の要因に着目しながら、 レイトレーシングシミュレーションへの組み込み について述べる。

反射像の測定は、宇宙研 30m X 線ビームラインで、 X 線ビームを 0.2mm に絞って行った。測定に

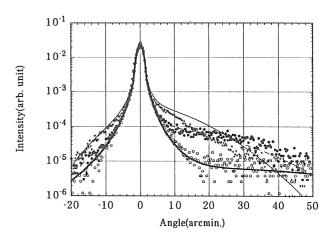


Figure.14 The reflected beam profiles. The open circles, filled circles, and crosses show the measured results at 1.5, 4.5, and 8.0 keV, respectively. The thin, dotted, and thick curves represent the model calculations installed in the present ray tracing program. The incident beam of the width of 0.2 mm is negligible small in this plot.

用いた X線は、Al-K(1.5keV)、Ti-K(4.5keV)、 $Cu-K\alpha(8.0keV)$ の特性 X線で、検出器には位置検出型比例計数管を用いた。図 14に測定結果を示す。 X線の斜入射角は 0.4度である。この図から反射像は、エネルギーに依存しない core と、エネルギーに依存したテールで構成されていることが分かる。あすか X線望遠鏡サンプルの場合、エネルギー依存しない core は、

$$\begin{split} f_{\text{core}}(\delta\theta) &= \exp\left(-\frac{\delta\theta^2}{2\sigma^2}\right) & (\delta\theta \leq 2 \, \text{arcmin}) \\ &= 10^{(a+b\log_{10}\delta\theta + c(\log_{10}\delta\theta)^2)} & (\delta\theta \geq 2 \, \text{arcmin}) \end{split}$$

で表される。ここで $\delta\theta$ は期待される反射角(=入射角)からのずれであり,単位は arcmin である。 σ ,a,b,cは広がりを示すパラメーターであり,図 14 からそれぞれ 0.8840,-0.5456,-1.719,-0.7066 となった。 core の分布は,反射鏡表面での X 線 ビームのスポットサイズ(\sim 20mm = 0.2mm/ $\sin 0.4$ °)で見たときの法線ベクトルのゆらぎを表し, mm スケールの waviness による。

エネルギー依存する散乱テールは、表面粗さに

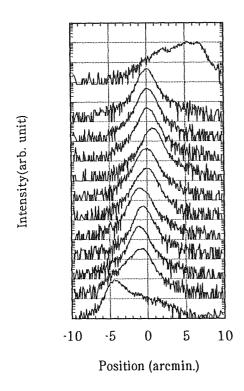


Figure.15 The X-ray beam profiles reflected by small part of a reflector that is 1mm×9 mm. To avoid overlap, we offset each piece of data from the previous one in the plot. Each profile comes from a spot every 9mm from the top to the end of the foil along the X-ray beam axis.

よる散乱成分であり、散乱角 $\theta_s(\theta_i + \delta\theta)$ に散乱 される強度は (7) 式で表されるが、この測定によって PSD 関数 W (p) が決定できる。図 14 に示された 3 本の曲線は、 (7) 式を変形した、

$$f_{sca}(\delta\theta; E, \theta_i) = sE^3 \sin\theta_i \sin^2(\theta_i + \delta\theta) W (p)$$

$$W(p) = \exp(tp)$$
(11)

である。ここでEは X 線のエネルギーで単位は keV, θ_i , $\delta\theta$ は arcminである。実験式 W (p) に おける p は (5) 式から求まり,単位は 1/Å にとった。またパラメーター s, t の値は, 68.88, -9329 となった。(10),(11) 式の関数は,反射する X 線の方向を決める確率分布としてレイトレーシング法に取り込む。つまり反射する X 線の方向は,これらの関数の確率分布でモンテカルロ法で決定する。

10mm以上の形状誤差は, 0.2mmの X 線ビーム

を使って反射鏡を X線ビームに対して走査して測定した。斜入射角は 1.26度とした。この設定でのビームの反射面上でのスポットサイズは約 9mm (= 0.2mm/ $\sin 1.26$ °) である。これで一枚の反射鏡から 12点の独立な位置でその反射像が得られる。但し,この設定で十分な反射率が得られるのは,エネルギーの低い AI-K(1.5keV)だけである。測定結果を,図 15に示す。図中の曲線は,一枚の反射鏡上でビームのスポットサイズと同じ9mm離れた独立な点の反射プロファイルである。それぞれの反射プロファイルのピーク位置のゆらぎは,そのスポットサイズで見た平均の法線ベクトルのゆらぎを表す。この測定結果から,法線ベクトルのゆらぎの分布として, $\Gamma=1$ arcminのローレンツ関数を得た。

個々の反射鏡のミスアラインメントは、あすか X線望遠鏡のアラインメントバーの溝幅 $175\,\mu$ m と 反射鏡の厚さ $135\,\mu$ m との間の遊びが原因である。この遊びのため、反射鏡全体の法線ベクトルはその設計値のまわりで最大 \pm arctan((0.175-0.135) /100)~1.4arcminゆらぐ。このゆらぎは、反射鏡1枚1枚に X線を照射して、その焦点面でのピーク位置のゆらぎとして調べた。この結果を、その期待される分布とともに図 16に示す。レイトレーシングシミュレーションには、反射鏡の上端と下端の位置が、その設計値に対して、 \pm 20.0 μ m だけランダムにずれるとした。

より現実的な修正を加えたレイトレーシング法を用いて、それぞれの要因が結像性能、有効面積に与える影響を調べることができ、またこれは将来のX線望遠鏡の開発方向を明らかにする。表面粗さによる散乱の影響はエネルギーに依存するため、この評価を1.5keVと8.0keVのX線について行った。表2に1.5keVと8.0keVのX線についてそれぞれの要因がHPDに与える影響をまとめる。この結果散乱成分は結像性能をHPDで表現するとき、現在の表面粗さのレベルで既にあすかX線望遠鏡に影響を及ぼさないことが分かる。しかしな

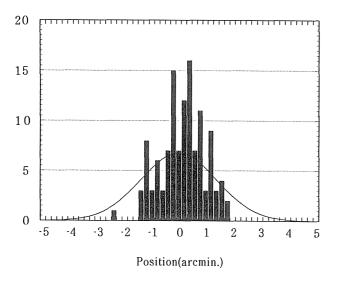


Figure.16 Histogram of X-ray peak positions of the reflected beam by each reflector on the focal plane. The expected distribution 120 foils is shown by a solid curve.

がら、特に高エネルギー X 線に対しては、散乱された光子は大角度まで分布するため、実観測において、目的の観測対象の近傍に明るい点源が存在する場合や、中心部より 2-3 桁も表面輝度が低い銀河団等の外縁部を調べたいときには問題となる。よってその改善を無視して良いものではない。また多重薄板 X 線望遠鏡の結像性能改善において、反射鏡の形状誤差、waviness、表面粗さの改善だけでは決して1分角を切ることはできないことも分かる。この場合ミスアラインメントの効果がきいてくるためで、将来の望遠鏡では反射鏡の改善と同時にアラインメント法の改善も要求される。

反射 X 線が本来の軌道からはずれたことによる 有効面積の減少もシミュレーションによって知る ことができる。1.5keV の X 線に対して、形状誤 差、waviness、表面粗さ、ミスアラインメントが 有効面積の減少に与える影響はそれぞれ、12%、 3%、1%、6%であり、また8keV の X 線に対す るそれは、ぞれぞれ9%、3%、10%、15%であ る。これらの数値は上で述べたように、それぞれ の要因を完全に取り除いたときに得られる値で、 2度以上計数された光子もある。よってすべての要 因を取り除いたときに期待される有効面積の改善

Table 2 Effect of each error to the image quality.

	1.5keV	8.0keV
Current HPD	3.3	3.3
micro-roughness	0	0
mm scale waviness	1.9	1.9
figure error	2.1	1.9
mis-alignment	1.9	1.9

は, これら数値の単純な和ではない。実際に 1.5keV, 8keVの X 線に対し, 現在の有効面積の 減少分は, それぞれ 20%, 30%程度である。

最後に、ここで述べたレイトレーシングの流れ を図17にまとめておく。

6. まとめ

X線ペンシルビームを用いて多重薄板型のあすか X線望遠鏡の X線光学特性を求め、その有効面積は理想的な場合に比べ20-30%小さいこと、その点源像は HPD3分角の広い分布の中心部に鋭いピークを持つことを明らかにした。有効面積、結像性能の劣化原因を探るため、反射鏡サンプルの反射率測定から、その光学定数を導きだし、像を乱す原因である反射鏡の表面粗さ、サブmmから数mmの waviness、数mm以上の形状誤差、各々の反射鏡間のミスアラインメントを定量的に調べた。ここで得られた光学定数と、反射ビームの広がりを考慮したレイトレーシング法を開発し、X線望遠鏡の応答関数を決定した。またこれにより、反射像の広がりが結像性能だけでなく有効面積に与える影響も定量的に評価した。

この研究は多重薄板 X 線望遠鏡の取り扱い法を確立しただけでなく、将来の X 線望遠鏡に対してもその開発の指針を与える。日本の次期 X 線天文衛星 ASTRO-E(2000年度打ち上げ予定)では、角分解能 1 分角以下を目標にしており、これは現在の多重薄板型では不可能である。このため、アルミフォイルでレプリカをとる方法が検討され、

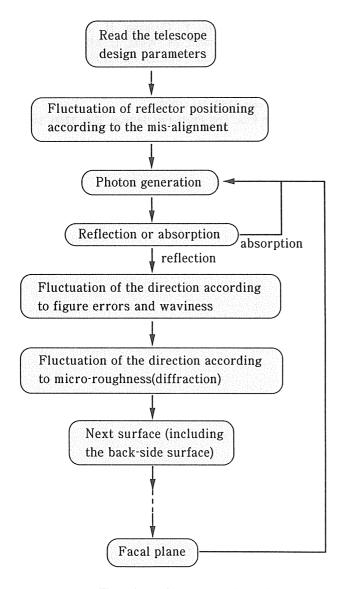


Figure.17 Flow chart of our ray tracing calculation.

現在までに1分角程度の分解能を持つ薄板反射鏡の見通しが得られている。今後の課題として,各反射鏡のアラインメント法の改善が必要であろう。

謝辞

ここで紹介した研究は、NASA/GSFCのP. J. Serlemitsos 博士、L. Jalota 博士、Y. Soong 博士、宇宙科学研究所の伊藤真之博士、小賀坂康志氏、本多博彦氏、京都大学の粟木久光博士、現浜松フォトニクス(株)の鈴木久則氏、現東芝(株)の内堀康弘氏との共同研究により行われたものである。また、宇宙科学研究所における較正実験では、大阪大学理学部の常深博教授、林田清博士を

はじめ宮本研究室の大学院生の方々に、迷光の測定では東京大学理学部牧島研究室の大学院生の方々に協力頂いた。UVSORにおける測定では、施設のスタッフの方々に協力を頂いた。ここに深い感謝の意を表す。

ケ献

- R. Giacconi, G. Branduardi, U. Briel, A. Epstein, D. Fabricant, E. Feigelson, W. Forman, P. Gorenstein, J. Grindlay, H. Gursky, F. R. Harnden, Jr, J. P. Henry, C. Jones, E. Kellogg, D. Koch, S. Murray, E. Schreier, F. Seward, H. Tananbaum, K. Topka, L. Van Speybroeck, S. S. Holt, R. H. Becker, E. A. Boldt, P. J. Serlemitsos, G. Clark, C. Canizares, T. Markert, R. Novick, D. Helfand, and K. Long: Astrophys. J. 230, 540 (1979)
- Y. Tanaka, H. Inoue and S. S. Holt: Publ. Astron. Soc. Japan 46, L37 (1994)
- P. J. Serlemitsos, L. Jalota and Y. Soong, H. Kunieda, Y. Tawara, Y. Tsusaka, H. Suzuki, Y. Sakima, T. Yamazaki, H. Yoshioka, A. Furuzawa, K. Yamashita, M. Itoh, Y. Ogasaka, H. Honda, Y. Uchibori and H. Awaki:Publ. Astron. Soc. Japan 47, 105 (1995)
- 4) B. E. Burke, R. W. Mountain, P. J. Daniels, M. J. Cooper and V. S. Dolat: IEEE Trans, Nucl. Sci. 41, 375 (1994)
- 5) Y. Kohmura, Y. Fukazawa, Y. Ikebe, Y. Ishisaki, S. Kamijo, H. Kaneda, K. Makishima, K. Matsushita, K. Nakagawa, M. Tashiro, T. Ohashi, H. Inoue, M. Ishida, F. Makino, T. Murakami, Y. Ogawara, Y. Tanaka, Y. Ueda, K. Ebisawa, T. Mihara, T. Takeshima, T. Tsuru, K. Hiyoshi, M. Horii, R. Shoumura and K. Taguchi: Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. eng. 2006, 78 (1993)
- R. Petre and P. J. Serlemitsos: Appl. Opt. 24, 1833 (1985)
- 7) L. G. Parratt: Phys. rev. 95, 359 (1954)
- 8) E. L. Church, H. A. Jenkinson, and J. M. Zavada: Opt. Eng. **16**, 360 (1977)
- P. A. J. de Korte and R. Laine: Appl. Opt. 18, 236 (1979)
- H. Kunieda, S. Hayakawa, T. HIrano, T. Kii, F. Nagase,
 N. Sato, Y. Tawara, F. Makino, and K. Yamashita: Jpn.
 J. Appl. Phys. 25, 1292 (1986)
- 11) H. Wolter: Annalen der Physic 10, 94 (1952)
- 12) L. P. Van speybroeck: Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. **106**, 136 (1977)
- 13) B. Aschenbach: Appl. Opt. 27, 1404 (1988)
- 14) P. A. J. de Korte, R. Giralt, J. N. Coste, C. Ernu, S. Frindel, J. Flamand, and J. J. Contet: Appl. Opt. 20, 1080 (1981)
- 15) W. Egle, H. Bulla, D. Scheulen, B. Aschenbach, and H. Brauninger: Opt. Eng., Bellingham **29**, 1260 (1990)
- 16) W. Egle, H. Bulla, P. Kaufmann, B. Aschenbach, and H. Brauninger: Opt. Eng. Bellingham. **29**, 1267 (1990)
- P. J. Serlemitsos, F. E. Marshall, R. Petre, K. Jahoda, E.
 A. Boldt, S. S. holt, R. Mushotzky, J. Swank, A.
 Szymkowiak, R. Kelley and M. Loewenstein: Frontiers

- of X-Ray Astronomy (Universal Academy Press Tokyo 1991), p. 221.
- 18) Y. Tsusaka, H. Suzuki, H. Awaki, K. Yamashita, H. Kunieda, Y. Tawara, Y. Ogasaka, Y. Uchibori, H. Honda, M. Itoh, H. Tsunemi, K. Hayashida, S. Nomoto, M. Wada, E. Miyata, P. J. Serlemitsos, L. Jalota, and Y. Soong: Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 2011, 517 (1993)
- 19) Y. Tsusaka, H. Suzuki, K. Yamashita, H. Kunieda, Y. Tawara, Y. Ogasaka, Y. Uchibori, H. Honda, M. Itoh, H. Awaki, H. Tsunemi, K. Hayashida, S. Nomoto, M. Wada, E. Miyata, P. J. Serlemitsos, L. Jalota, and Y. Soong: to be appeared in Appl. Opt. 34 (1995)
- 20) H. Kunieda, Y. Tsusaka, H. Suzuki, Y. Ogasaka, H. Awaki, Y. Tawara, K. Yamashita, T. Yamazaki, M. Itoh,

- T. Kii, F. Makino, Y. Ogawara, H. Tsunemi, K. Hayashida, S. Nomoto, M. Wada, E. MIyata and I. hatsukabe: Jpn. J. Appl. Phys. 32, 4805 (1993)
- 21) J. R. Lemen, E. S. Claflin, W. A. Brown, M. E. Bruner, R. C. Catura and M. D. Morrison: Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. eng. **1160**, 316 (1989)
- P. Glenn: Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng. 1160, 349 (1989)
- 23) B. L. Henke, P. Lee, T. J. Tanaka, R. L. Shimabukuro, and B. K. Fujikawa: Atomic Data and Nuclear Data Tables 27, 1 (1982)
- 24) R. Giacconi, W. P. Reidy, G. S. Vaiana, L. P. Van Speybroeck, and T. F. Zehnpfenning: Space Sci. Rev., 93 (1969)

意いわーと

Wolter I型光学系

光軸方向から入射した光に対し焦点を結ぶ回転 放物面と、曲面上の任意の点における接線がその 点と2つの焦点を結んだときにできる角を二分する 回転双曲面を組み合わせた光学系で、放物面の焦 点と双曲面の1焦点とを共焦点になるように配置す ることで光軸からの光は一点に集光する。1回反射の斜入射の放物面鏡を用いる場合、光軸に対しある角度を持つ光に対しては像を結ぶことはないが(コマ収差),偶数回の反射を用いるとこのコマ収差は十分無視できる。この光学系は完全な無収差光学系ではないが、近似的に無収差光学系の条件(Abbe の正弦条件)を満たす。