

■第11回日本放射光学会奨励賞受賞報告

非線形共鳴近傍における位相空間中でのベータトロン振動の研究

宮島 司 (高エネルギー加速器研究機構 物質構造科学研究所)

1. はじめに

放射光源用の電子貯蔵リングでは、高輝度の放射光を安定に発生させること、言い換えると、低エミッタンスビームを安定に周回させることが重要な課題の一つである。ビームの安定性を乱す現象として、ベータトロン振動の共鳴現象や、ビームの作る航跡場やイオン化された残留ガスとの相互作用によるビーム不安定性現象などがある。ビーム不安定性現象の多くは電磁場を介したビーム粒子間の相互作用に基づくものであるのに対して、ベータトロン振動の共鳴現象は、周回軌道を形成するためのポテンシャル中での単粒子の振動現象であり、電子貯蔵リング中でのビームの運動としてより基本的なものである。特にビームの長時間安定性を特徴付ける力学口径の大きさに対して、ベータトロン振動の共鳴現象は本質的な役割を果たしている。

電磁石によって構成された一般的な加速器中では、ビームは横方向（水平、垂直方向）にベータトロン振動をしながら進行していく。これは、PF や SPring-8 などの多くの放射光源で用いられている円形加速器型の電子貯蔵リングや、線形加速器（Linac）を用いた自由電子レーザー用の線形加速器、エネルギー回収型線形加速器（Energy Recovery Linac）などのどの形式の加速器でも同じことである。しかしながら、円形加速器と線形加速器のベータトロン振動では決定的に異なる点がある。それはベータトロン振動の共鳴現象があるかないかである。円形加速器では、ビームは閉じた軌道上を周回し続けるため、その運動は周期的なポテンシャル中での運動となる。このとき、リング内に誤差磁場が僅かでも存在すると、条件によってはその力を繰り返し受け続けることになり、振動振幅が増大する共鳴現象が発生する可能性がある。このように、電子貯蔵リングでは、ベータトロン振動の共鳴現象はその構造から避けられないものである。

ベータトロン振動の共鳴現象は、A) 振動の条件（リング1周あたりの振動位相の進み）、B) 共鳴の起源、という2つの条件によって特徴付けられる。A) の振動位相の進みは制御が容易であり、電子貯蔵リングの運転では共鳴を避けた条件の下で運転される。一方、B) の共鳴の起源は、電磁石の製作誤差や設置誤差による誤差磁場や、6極電磁石等の非線形磁場成分に起因するものであり、その起源を見極めるのが難しく、また制御も容易ではない。さらに、放射光用の電子貯蔵リングでは、衝突型加速器や重粒子シンクロトロンとは大きく異なる特徴がある。それは挿

入光源が多数設置されているということである。挿入光源は非線形磁場を生じさせる要素にもなり、条件によっては共鳴の起源にもなりえる。さらに、近年多くの放射光源で実用化されつつあるトップアップ運転においても、共鳴現象が影響を及ぼす可能性がある。トップアップ運転では、ビームラインのシャッターを開けた状態でビーム入射が行われるため、僅かなビーム損失も避けなければならない。しかしながら、入射中はキッカー電磁石が励磁されるため、条件によっては蓄積ビームの振動が励起される可能性があり、共鳴に近い条件ではビーム損失が生じる可能性がある。このように放射光用の電子貯蔵リングでは、共鳴の起源となる非線形磁場成分を生じさせる要素が多数存在し、さらにトップアップ運転により常に振動が励起される状態にあるため、共鳴の性質を十分に理解することが安定な運転に対して重要となっている。

これまでに、ベータトロン振動の共鳴に関する研究は、正準摂動論に基づく解析的な方法、数値計算による方法とともに、複数の加速器において実験的な手法を用いて行われてきた。特に実験による研究では、あらゆる誤差を含んだ現実の加速器を対象とすることができ、結合共鳴や高次の共鳴など多くの共鳴でベータトロン振動の観測が行われた¹⁾。しかしながら、これまでの実験による研究では、単一の条件下でのみ共鳴を観測していたため、共鳴の起源を推測することは困難であった。

そこで、本研究では、共鳴の起源を推測する方法を確立し実証することを目的として、放射光用電子貯蔵リングである2.5 GeV PF-ring において、実験的手法を用いて非線形共鳴現象についての研究を行った^{2,3)}。ベータトロン振動の共鳴現象の特徴的な状態は、位相空間中で顕著に現れるため、実験的に位相空間情報を得るための実験装置として、位相空間モニターシステムを開発した。さらに本研究では、非線形共鳴を引き起こす原因となる非線形磁場の起源を推定する方法を提案し、その有効性を検証した。

2. ベータトロン振動の共鳴現象

ビームがリングを1周する間に何回振動するかを表す量は、ベータトロン・チューンと呼ばれ、ベータトロン振動を特徴付ける重要な量である。チューンの選び方によっては、多くの振動現象で見られるような共鳴現象が、ベータトロン振動においても発生する。チューンが整数のときに生じる整数共鳴は、ビームがちょうどリングを1周し

た後に、1周前と同じ振動位相をもって元の場所に戻ってくるということが原因となる。このような条件下では、リングのある点にごく僅かでも誤差磁場が存在すると、ビームは1周毎に同じ振動位相でその力を繰り返して受け続けることになり、振動振幅は増大し続ける。そして、ついには振幅が真空チャンバーの内壁よりも大きくなり、内壁に衝突してしまうことになる。通常の運転では、このような共鳴を避けるために、チューンが整数から離れるようにビームの束束系を調整する。このような整数共鳴の他に、リングに存在する磁場の非線形成分によって、さらに高次の共鳴が生じる可能性がある。このような共鳴の条件は、チューンを ν_y とすると、1次元 n 次共鳴の場合には $n\nu_y = l$ ($l=1, 2, 3, \dots$) となる。

非線形共鳴近傍では、ごく僅かな非線形磁場でも、振動振幅の増大を引き起こし、力学口径の縮小やビーム損失を生じさせる原因となりえる。特に、放射光用の電子貯蔵リングでは、色収差補正用の強力な6極電磁石や挿入光源の誤差磁場など、非線形磁場を生じさせる要素が多数存在するため、これらの影響を定量的に評価することは、その補正に向けて非常に有効である。共鳴を定量的に評価するために、本研究では、線形なベータatron振動を記述するハミルトニアンに、共鳴の起源となる磁場のポテンシャルを導入し、対象とする次数の摂動項のみを残すというモデルを導入した。このモデルを用いると n 次の共鳴 ($n\nu_y = l$) を記述するハミルトニアンは、

$$H_n = \nu_y J_y + \frac{1}{2} \alpha_{yy} J_y^2 + J_y^{n/2} G_{0,n,l} \cos(n\phi_y - l\theta + \xi_y), \quad (1)$$

となる。ここで (J_y, ϕ_y) はベータatron振動の作用変数と角変数で、それぞれ振幅と位相を表す。 θ はビームの進行方向の位置を表すパラメータ(時間に対応するパラメータ)、 ξ_y は初期位相である。このモデルでは、ベータatron振動の共鳴現象は a) 振幅依存チューンシフト α_{yy} , b) 共鳴の強さ $G_{0,n,l}$, という2つのパラメータ(共鳴パラメータ)によって特徴付けられる。共鳴状態では、ベータatron振動の位相空間(位置・運動量空間)において、共鳴パラメータの値に応じてセパトリクス構造や島状構造などの共鳴に特有な軌跡が観測される。この様子を見るために、共鳴パラメータの変化によってベータatron振動の軌跡がどのように変化するかについての例を Fig. 1 に示す³⁾。Fig. 1 では、簡単のために(1)式のハミルトニアンを無次元化して表現しており、共鳴パラメータを (Δ, Ω) としている。Fig. 1 からわかるように、共鳴パラメータが変化するとともに、島状構造の位置が変化していく。このように、2つの共鳴パラメータは、共鳴近傍のベータatron振動を特徴付ける重要なパラメータとなっている。

本研究では、このような特徴的な軌跡が現れる位相空間中のベータatron振動を観測することによって、共鳴パラメータの測定を行った。さらに、非線形磁場を積極的に制

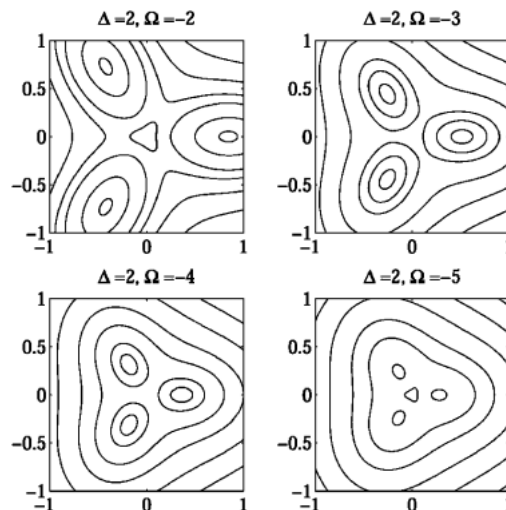


Fig. 1 Phase space motion for a third-order resonance in a normalized phase space. The phase space pattern was calculated using the nonlinear resonance Hamiltonian (1), where, the detuning parameter is $\Delta = (\nu_{y0} - Nl/n) / (G_{0,n,l} J_0^{n/2-1})$, the tune-spread parameter is $\Omega = \alpha_{yy} / (2G_{0,n,l} J_0^{n/2-2})$ and J_0 is the initial action variable³⁾.

御し、それに対する共鳴パラメータの応答を測定する方法を提案した²⁾。この方法を用いることで、共鳴パラメータをより正確に決定することが可能となり、またその応答から共鳴の起源を推測することも可能となる。実験では非線形磁場として8極磁場を変化させた。8極磁場をパラメータとした理由は、1)色収差などに影響を与えることなく振幅依存チューンシフト量を変えられることができ、2)4次共鳴の強さも制御することができるからである。特に我々の方法を検証するには、予め起源のわかった共鳴で実験を行う必要があり、垂直4次共鳴近傍で8極磁場を制御することは本質的に重要なことであった。さらに、他の共鳴に対しても、8極磁場の強さを変えることは、共鳴パラメータの一つである α_{yy} を変えることに対応するため、位相空間中の軌跡の変化を観測するには有効な方法である。このような理由から、我々は実験において8極磁場の強さに対する共鳴パラメータの応答を測定することとした。

3. 位相空間モニターシステムの開発

位相空間中のベータatron振動を観測するために、ビームに初期振幅を与えるための高速キッカー電磁石と、ビームの位置と傾き(運動量)を測定するための位相空間モニターシステムを開発した⁴⁾。位相空間モニターでは、リングの直線部に設置された2箇所のビーム位置検出用電極からの信号を、1ターン毎にメモリに蓄積していくことが可能となっている。位相空間モニターシステムの概念図を Fig. 2 に示す。ビームの重心振動が起きていない状態を初期状態として、ビームが来た瞬間に高速キッカー電磁石を1度だけ励磁し、ビームに重心振動を起こした後、

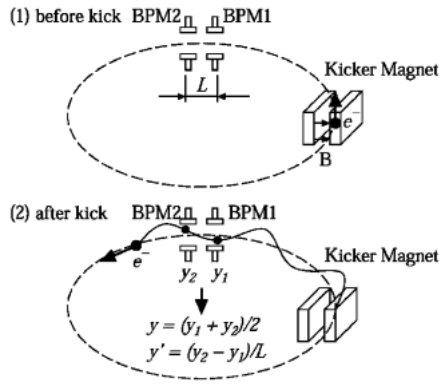


Fig. 2 Schematic view of the phase space monitor system.

振動の変化を2箇所の電極を用いて測定している。実際の実験では、2箇所の電極として、その間に電磁石がないドリフトスペースに設置されているものを選んだ。このため、2箇所のデータの差から y' を求めることができ、 y 、 y' 位相空間での軌跡を構成することができる。得られた位相空間の軌跡を、(1)式のモデルハミルトニアンにフィッティングすることによって、我々は共鳴パラメタを決定した。この一連の測定を、8極磁場の強さを変えながら行い、共鳴パラメタの8極磁場に対する応答を測定した。

4. 垂直4次、3次共鳴での実験

我々は、垂直4次共鳴 ($4\nu_y=17$) と垂直3次共鳴 ($3\nu_y=13$) に対して実験を行った。予め起源がわかっている4次共鳴での実験は、我々が提案した共鳴パラメタを決定する方法を検証することを目的としている。これに対して垂直3次共鳴は、理想的な状態では起源のない弱い共鳴と予測される。3次共鳴の実験は、現実の誤差が存在する状況下において、このような弱い共鳴がどのようになるかを観測し、起源を推定することを目的としている。

8極磁場によるポテンシャルが存在する場合のベータatron振動に対して、正準摂動法を適用すると、共鳴パラメタは8極磁場の強さ K_3 に対して、

$$\alpha_{yy} = \frac{1}{16\pi} K_3 \sum_{i=1}^4 \beta_{y,i}^2 \quad (2)$$

$$G_{0,4} e^{i\phi_y} = \frac{1}{96\pi} K_3 \sum_{i=1}^4 \beta_{y,i}^2 e^{i[4x_i - (4\nu_y - D)\theta]} \quad (3)$$

のような線形な関係になると予想される²⁾。ここで、 $\beta_{y,i}$ は8極電磁石中でのベータatron関数を表す。共鳴パラメタの一つである α_{yy} は(2)式を用いて数値的に計算可能であるが、一方の $G_{0,4,17}$ はビーム光学系の条件に非常に敏感であるため、数値計算から誤差を含んだ現実のリングでの値を予測するのは難しい。しかしながら、(3)式からわかるように、 $G_{0,4,17}$ が K_3 に対して線形な応答を示すことは変わらない。従って、実験でも共鳴パラメタの線形な振る舞いが得られれば、我々の提案する非線形磁場に対す

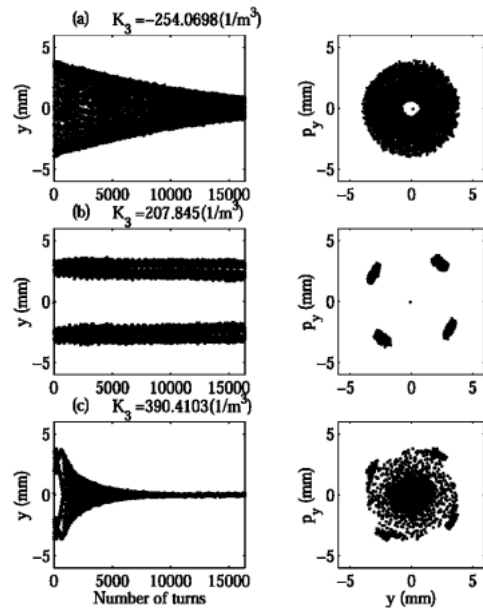


Fig. 3 Plot of measured vertical positions at each revolution after a vertical kick near the fourth-order resonance at $K_3 = -254.45 \text{ m}^{-3}$, 208.23 m^{-3} and 390.89 m^{-3} . Phase space plots (y - p_y) are also displayed²⁾.

る共鳴パラメタの応答を測定する方法が有効であり、さらにその振る舞いから共鳴の起源を推測することが可能であることを示すことができる。

4次共鳴での代表的な測定結果をFig. 3に示す。8極磁場が強くなるに従い、振動が減衰する状態から、島状構造を形成する状態に移行することがわかる。これらの測定結果から求めた α_{yy} および $G_{0,4,17}$ をそれぞれFig. 4, Fig. 5に示す。共鳴パラメタは予想通り8極磁場に対して線形な応答を示していることがわかる。 α_{yy} および $G_{0,4,17}$ の K_3 依存性を、それぞれ $\alpha_{yy} = a_0 + a_1 K_3$, $G_{0,4,17} = g_0 + g_1 K_3$ と表した場合、実験から得られた係数は $a_1 = 0.0035 \text{ m}^3 \text{ mm}^{-1}$, $g_1 = 3.54 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ mm}^{-1}$ となった。また、係数 a_1 は、(2)式を用いて数値計算が可能であり、 $a_1 = 0.0032 \text{ m}^3 \text{ mm}^{-1}$ と計算された。二つの係数を比較すると、実験から得られた係数は数値計算から得られた係数とほぼ一致していることがわかる。これらの結果をまとめると、1)垂直4次共鳴の共鳴パラメタはともに8極磁場に対して線形な応答を示す、2)実験から得られた係数は理論から予想される結果とほぼ一致する、ということである。すなわち、実験結果は垂直4次共鳴の起源は8極磁場であることを示している。このように、垂直4次共鳴に対する実験によって、本方法が共鳴の起源を推測するのに有効であることを示すことができた。

次に、理想的な条件下では共鳴の起源のない垂直3次共鳴に対して、本方法を適用して実験を行った。実験前の予測では3次共鳴は非常に弱いと考えられていたが、実験では予測とは異なり明確な共鳴が観測された²⁾。また共

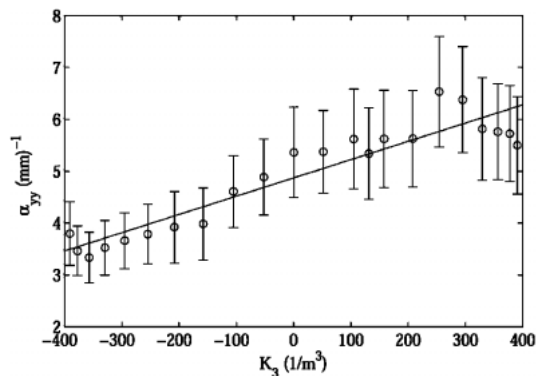


Fig. 4 Dependence of the detuning parameter α_{yy} on octupole field strength K_3 for measuring fourth-order resonance²⁾. The detuning parameter is calculated from the data of the betatron tune and J_y . The solid line was computed using a least-squares method based on the supposition that α_{yy} is a linear function of K_3 .

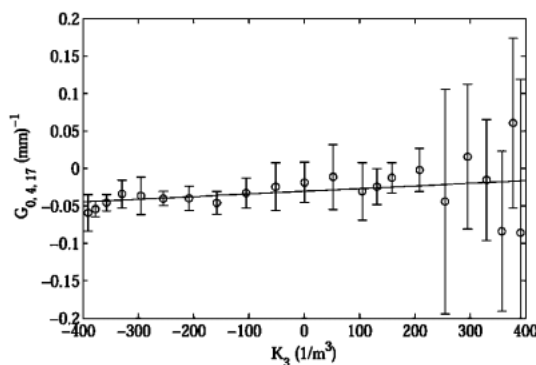


Fig. 5 Dependence of the resonance strength $G_{0,4,17}$ on the octupole field strength K_3 for measuring fourth-order resonance²⁾. The solid line was computed using a least-squares method based on the supposition that $G_{0,4,17}$ is a linear function of K_3 .

鳴パラメタの応答では、 α_{yy} は 8 極磁場に対して線形な応答を示したが、 $G_{0,3,13}$ は 4 次的な振る舞いを示すという結果が得られた。この 8 極磁場に対する複雑な応答を詳細に検討した結果、8 極電磁石中での COD と 6 極磁場の回転が垂直 3 次共鳴の起源となることを示すことができた。

5. まとめ

我々は、ベータatron振動の非線形共鳴現象に注目して、放射光用電子貯蔵リングである 2.5 GeV PF-ring において、実験的手法を用いて非線形共鳴現象についての研究を行った。特に実験によって、現実のあらゆる誤差を含んだ加速器中での共鳴の起源を推測する方法を確立することを目的として、共鳴パラメタをより正確に決定する方法を提案した。共鳴現象の特徴的な状態は位相空間中で顕著に現れるため、位相空間モニターシステムを開発し、これを用いて垂直 4 次共鳴、垂直 3 次共鳴近傍でのベータトロ

ン振動を観測した。

本研究で提案した位相空間パターンの非線形磁場依存性を測定する方法によって、共鳴パラメタをより正確に決定することができ、また共鳴の起源を推測可能であることを示すことができた。さらに、本方法を適用することによって、挿入光源のギャップ変更に伴う非線形磁場の影響も評価可能であり、今後、その補正を行うことも可能になると考えられる。

謝辞

本研究は、高エネルギー加速器研究機構物質構造科学研究所放射光源研究系電子軌道グループの小林幸則助教授との共同で行いました。心より感謝いたします。また、同グループの原田健太郎助手、長橋進也氏には、研究についてはもちろんのこと、それ以外にも多くの面でサポートしていただきました。また本研究を進めることを推奨していただきました放射光源研究系の主幹である春日俊夫教授に感謝いたします。首都大学東京大学院理工学研究科の宮原恒昱教授、岡部豊教授、住吉孝行教授、そして兵庫県立大学高度産業科学技術研究所 (NewSUBARU) の安東愛之輔教授には、本研究に対する貴重な助言をいただきました。最後に、放射光源研究系のスタッフ、そして PF-ring のオペレータである三菱電機システムサービスの方の支援なしでは本研究を行うことはできませんでした。心よりお礼申し上げます。

参考文献

- 1) S. Y. Lee *et al.*: Phys. Rev. Lett. **67**, 3768 (1991).
- 2) T. Miyajima and Y. Kobayashi: Japanese Journal of Applied Physics. **44** No. 4A, 2006 (2005).
- 3) T. Miyajima and Y. Kobayashi: Journal of Particle Accelerator Society of Japan, **1** No. 2 98 (2004).
- 4) Y. Kobayashi, T. Mitsuhashi, A. Ueda and T. Kasuga: *Proc. Fifth European Particle Accelerator Conf., Sitges, Spain, 1996*, pp. 1666-1668.

● 著者紹介 ●



宮島司

高エネルギー加速器研究機構物質構造科学研究所放射光源研究系助手

E-mail: tsukasa.miyajima@kek.jp

専門：加速器物理、非線形ビーム物理、加速器用電磁石システムの開発

【略歴】

1999年東京都立大学大学院理学研究科修士課程修了、1999年高エネルギー加速器研究機構文部科学技官、2004年高エネルギー加速器研究機構技師補、2005年東京都立大学大学院理学研究科博士 (理学)、2006年より現職。